Wie man Mathematik nicht unterrichten sollte

- eine Kritik der "Empfehlungen für den Kursunterricht, Curriculum, Gymnasiale Oberstufe, Mathematik" (Schriftenreihe "Schulreform NW, Sekundarstufe II", Heft 12 des Kultusministers von NW).

von Lutz Führer, TU Berlin, z.Z. Uni Bonn,
und Hermann Karcher, Uni Bonn.

Vgl. die DMV-Denkschrift "Mathematikunterricht an Gymnasien" von 1976
(s. https://dmv.mathematik.de/index.php/aktuell-presse/stellungnahmen/der-dmv/177-archiv/1695-1976-denkschrift-mathematikunterricht-an-gymnasien)

Mit der vorliegenden Kritik der Empfehlungen* wenden wir uns hauptsächlich an die Mathematiklehrer der höheren Schulen. Wir können nicht glauben, daß viele Lehrer überzeugt sind, mit den dort gemachten Kursvorschlägen sei dem Mathematikunterricht geholfen. Daß sie tatsächlich sogar schaden, haben wir detailiert zu begründen und durch Zitate zu belegen versucht. Als Hochschullehrer fühlen wir uns berechtigt und als Eltern verpflichtet, unsere Meinung zu den Empfehlungen zu sagen. Wir wissen inzwischen, daß die Verfasser der Empfehlungen geradezu lächerlich wenig Zeit für diese Arbeit hatten. Daher rechnen wir mit keiner wesentlichen Reaktion von seiten des Kultusministeriums. Um so mehr liegt uns an einer Reaktion von seiten der Lehrer, denn sie können sich wenigstens noch bei der Auswahl von Lehrbüchern, mit Beschlüssen in Fachkonferenzen und bei der Ausbildung von Referendaren gegen solche "Empfehlungen" des Kultusministeriums wehren. Nach dreimonatiger Arbeit an vielen neuen Entwürfen ist der Schrecken, der uns bei der ersten Lektüre der Empfehlungen ergriffen hat, noch immer lebendig. Wir bitten daher unsere Leser, insbesondere die Autoren der Empfehlungen, die im Text enthaltene Polemik - wie wir - auf den <u>Inhalt</u> zu beziehen. Allen Kollegen von Schule und Hochschule, die Vorläufer dieses Manuskripts geduldig mit uns erörtert haben, danken wir herzlich: mit ihrer Hilfe hoffen wir, Mißverständnisse auf ein erträgliches Maß reduziert zu haben.

Bonn, Sept.1973 L. Führer, H. Karcher

P.S.: Soeben haben wir die neuen Gesetzentwürfe zur Lehrerfortbildung (Sekundarstufe I und II) kennen und fürchten gelernt. Damit wird unsere Kritik der Empfehlungen bald weitgehend überflüssig, denn die Nachwuchslehrer werden die vorgeschlagenen Kurse ohnehin nicht unterrichten können (bestenfalls jedes Jahr denselben).

---

* Mit "Emfehlungen" kürzen wir im folgenden stets die "Empfehlungen für den Kursunterricht, Curriculum, Gymnasiale Oberstufe, Mathematik" aus der Schriftenreihe "Schulreform NW, Sekundarstufe II" des Kultusministers von NW ab.

Bonn, Februar 1976

Wegen des anhaltenden Interesses haben wir unser $2\frac{1}{2}$ Jahre altes Manuskript noch einmal vervielfältigt. Wir bedauern, daß uns die Zeit zu einer Überarbeitung gefehlt hat. Auf Grund der Reaktionen, die uns erreicht haben, scheint es notwendig, noch einmal zu betonen, <u>daß unser Hauptanliegen eine kritische Auseinandersetzung mit den Empfehlungen war.</u> Spätestens die Jahrestagung der Deutschen Mathematiker Vereinigung in Tübingen (1975) hat gezeigt, daß die von uns kritisierten Entwicklungen in der Schulmathematik auch eine große Mehrheit unserer Kollegen mit Besorgnis erfüllen. Während wir also von unserer <u>Kritik</u> nichts zurücknehmen, müssen wir doch sagen, daß die "konstruktiven" Teile unseres Manuskriptes nicht zu wörtlich genommen werden sollten: sie sind von uns geschrieben, um klarer zu machen, was wir kritisieren und welche Fehler vermieden werden müssen. Allein schon, weil nichts dazu gesagt ist, wie an die Mittelstufe angeknüpft werden soll, und fast nichts dazu, was für Beispiele zur Motivation zentraler Definitionen behandelt werden können, sind diese "konstruktiven" Teile nicht unmittelbar verwendbar.

L. Führer, Wilhelmshaven

H. Karcher, Bonn

Übersicht:

Unsere Hauptaufgabe haben wir darin gesehen, die Vorschläge der Empfehlungen in sorgfältiger Detailarbeit zu analysieren. Die vorgetragenen Argumente bekommen zwar erst im Zusammenhang ihr richtiges Gewicht; aber wir hoffen sehr, daß die meisten Kritikpunkte auch für sich allein verständlich begründet sind, denn auf diese Weise besteht die größte Aussicht, daß unsere Kritik zu einer lebhaften Diskussion der Empfehlungen führen wird (an der sich jeder Lehrer beteiligen kann).

Wir möchten dem Hauptteil einige Bemerkungen voranschicken, die sich auf die Empfehlungen als Ganzes beziehen - bei solchen allgemeinen Aussagen kann man naturgemäß leichter anderer Meinung sein und schwerer durch Argumente überzeugt werden.

1. Zur Einführung des Kurssystems im Fach Mathematik

Die von der KMK beschlossene Einführung des Kurssystems ist eine Tatsache, sie bleibt aber für die Mathematik eine problematische Entscheidung *. Der Mathematik-Unterricht gerät damit in eine Bedrängnis, auf die er - wie die Empfehlungen deutlich zeigen - weder eingerichtet ist noch ohne Substanzverlust eingerichtet werden kann. Dies aus mehreren Gründen:

a) Sowohl die klassische als auch und besonders die "Neue" Mathematik-Didaktik leben vom allmählichen Aufsteigen zu komplizierteren Kalkülen und größeren Interdependenzen (Strukturanreicherung).

b) Eine traditionelle Schwierigkeit des Mathematik-Unterrichts besteht in seinem scheinbaren Mangel an Sinnfälligkeit und Nützlichkeit. Man mag dies unterschreiben oder nicht, jedenfalls sehen es viele Schüler so. Will man dem Mathematik-Unterricht auf der gymnasialen Oberstufe weiterhin eine allgemeine Bildungsfunktion zubilligen, so darf man nicht nur theoretisieren, sondern muß auch zeigen, wozu Mathematik gut und nützlich ist - vor allem auch außerhalb der Mathematik.**

c) Kompliziertheit und Anwendbarkeit mathematischer Kalküle gehen oft Hand in Hand. Einerseits erfordert die zunehmende "Mathematisierung vieler Wissenschaften" tiefere mathematische Vorbildung ihrer künftigen Studenten, andererseits wird vielen Schülern die Flucht vor mathematischen Anstrengungen in solche Fächer

---

* Klingens Bemerkung in MNU: "Dabei erweist sich die Rhythmisierung des Lehrstoffes auf in der Mehrzahl unabhängige Halbjahreseinheiten als kleinere Schwierigkeit, als es in der Mathematik zunächst erwartet werden konnte." (Bd. 26, Heft 3, S. 129) haben wir nicht verstehen können.

** Formeln wie "Erziehung zu logischem Denken" sind nur für wenige Schüler attraktiv, die anderen müssen sehen können, wo und wie Mathematik anderswo anwendbar ist.

nahegelegt, die erst auf der Oberstufe einsetzen, darum häufig auf propädeutischem Niveau bleiben müssen und nur scheinbar besser auf das spätere Studienfach vorbereiten. Man verstehe uns richtig: Wenn ein sinnvoller Wettbewerb dazu führt, die Schulmathematik gesund zu schrumpfen, so ist das nur zu begrüßen. Der hier installierte Wettbewerb bleibt aber solange verzerrt wie dem Schüler die Konsequenzen seiner Kurswahl oder -abwahl in bezug auf sein späteres Studium nicht klargemacht werden können. Darauf sind weder Lehrer noch Hochschulen noch Ministerien ausreichend vorbereitet (von der Schulbuch-Literatur ganz zu schweigen).

2 . Wahlfreiheit

Selbst nach dem Vordiplom sind Mathematikstudenten an Universitäten erfahrungsgemäß kaum in der Lage, Interessen für Spezialgebiete zu artikulieren. Die Auswahl der Seminare erfolgt deshalb regelmäßig nach nicht-fachbezogenen Gesichtspunkten wie zeitlicher Koordination, Sympathie oder Prüfungsruf des Dozenten, Anzahl der freien Plätze, etc. Woher sollte der Schüler Interesse für Spezialthemen entwickeln? Aus dem Eingangskurs? Aus der Analysis? Nun zeigt die Praxis offenbar, daß alles so heiß nicht gegessen wird: In der Regel bleibt der Schüler bei dem Lehrer, den ihm der Zufall bescherte. Dieser Lehrer wählt die Themen für ganze Schülergruppen aus und darf auch gelegentlich mal etwas Mathematik voraussetzen. Die Wahlfreiheit bleibt also das, was sie seit ihrer Einführung vor allem war: Ein Scheinargument für das Kurssystem! Ein Scheinargument für eine mangelhaft vorbereitete politische Entscheidung! *

---

* Wer das nicht glauben mag, sollte einmal untersuchen, auf welchen Schulen des Landes NW die geforderten Eingangsbedingungen für die Oberstufe in jedem Jahrgang garantiert sind, oder er sollte einmal fragen, ob durch das Kurssystem nicht u.U. der Mathematiklehrer-Mangel verschärft werden könnte, oder er sollte einmal in die Lehrbücher hineinschauen, die zu den Kursen angegeben sind (z.B. Redei und van der Waerden zum Kurs 'Algebraische Strukturen').

3. Zielsetzungen mathematischen Unterrichts in den Empfehlungen

Wir wollen einmal zitieren, was wir in den Empfehlungen an Äußerungen über die Zielsetzungen mathematischen Unterrichts finden konnten:

S.8: "Die Kommission ist der Meinung und sieht sich durch die Ergebnisse von Abnehmerbefragungen unterstützt, daß in keinem Lehrgang auf Analysis verzichtet werden kann. Andererseits lassen sich die allgemeinen Lernziele der Schulung formalen Schließens und exakten Beweisens, der Förderung problemlösenden Verhaltens in Anwendungsbereichen und der Pflege der Raumanschauung an geometrischen Objekten im engsten Zeitrahmen des viersemestrigen Grundkurses nicht mehr gleichverteilt unterbringen. Die Kommission stellt deshalb im Grundkurs 2 verschiedene Vorschläge für die Behandlung der Analysis zur Wahl."

S.8/9: "Die Kommission hat eine ihrer wesentlichsten Aufgaben darin gesehen, Themenangebote für Leistungs- und Grundkurse so aufzubereiten, daß sie hinsichtlich der zumutbaren Forderung und der erreichbaren Rundung im vorgesehenen Zeitrahmen möglichst ausgewogen sind und in alternativen Kursfolgen die wichtigsten allgemeinen Lernziele mathematischen Unterrichts abdecken. Hierbei wird unterstellt, daß viele hier nicht genannte spezifische Lernziele (z. B. Schulung in der sprachlichen Beherrschung mathematischer Sachverhalte) bei geeignetem Vorgehen durch jeden beliebigen Kurs erfaßt werden können. Das Verfahren sei an einem Beispiel erläutert: ein Grundkurs 'Komplexe Zahlen' erscheint in einem (hier nicht mitgeteilten) Zusammenhang wünschenswert. Für das Anspruchsniveau des Grundkurses erscheint der Fundamentalsatz der Algebra, der eine besonders sinnvolle Rundung des Themas darstellt, nicht erreichbar. Andererseits läßt der Zeitrahmen nach der exakten begrifflichen Einführung der komplexen Zahlen noch Platz. Um in die Nähe von Anwendungssituationen zu gelangen, werden konforme Abbildungen hineingenommen. Wegen wünschenswerter Unabhängigkeit von anderen Kursen und wegen der Beschränkung des Anspruchsniveaus werden jedoch nur lineare Funktionen behandelt. Der Leistungskurs stellt das Thema von vornherein in den größeren Zusammenhang 'Aufbau des Zahlensystems'. I n ä h n l i c h e r W e i s e e r g e b e n s i c h a l l e v o r l i e g e n d e n V o r s c h l ä g e a u s e i n e r W e c h s e l b e z i e h u n g d e r g e n a n n t e n B e d i n g u n g e n." (Von uns gesperrt)

S.10:
"Die Kommission verzichtet darauf, die Aufgabe der Leistungskurse und Grundkurse explizit durch verbale Formulierungen zu definieren. Vielmehr erfolgt die vollständige Beschreibung dieser Aufgaben in 'aufzählender Form' durch die folgenden Texte."

S.7: "Auf die Angabe operationalisierter Lernziele muß verzichtet werden."

S.159: "Die vorliegenden Lehrplanhilfen sind unter der dreifachen Prämisse entstanden, daß die Richtlinien von 1963 sowohl in ihrer Struktur als auch in ihren I n h a l t e n einen M o d e r n i t ä t s r ü c k s t a n d aufweisen, daß nach dem gegenwärtigen Stand der Curriculumforschung ein wissenschaftlich gesichertes Curriculum für die einzelnen Fächer des Gymnasiums in absehbarer Zeit nicht zu erwarten ist, daß aber dennoch Lehrplanentscheidungen getroffen werden müssen, die die langfristig angesetzte wissenschaftliche Curriculumentwicklung von der Schulpraxis her vorbereiten helfen."

S.5: "...Vielmehr sind alle Reformmaßnahmen in der Sekundarstufe II, ob sie die studienbezogenen Ausbildungsgänge der gymnasialen Oberstufe oder die beruflichen Ausbildungsgänge im beruflichen Schulwesen betreffen, in ihrem inneren Zusammenhang und ihrer wechselseitigen Beziehung zu sehen."(Vorwort des Herrn Kultusministers; dem werden die Empfehlungen niemals gerecht.)

Sieht man zunächst einmal von den kurzen Zielsetzungsbeschreibungen zu den einzelnen Kursen ab, so ist hier alles zusammengetragen, was über die Konzeption der Empf. ausgesagt wird.

In Anbetracht der Bedeutung dieser Unterrichtsreform erscheint uns das als zu wenig. Da das Kurssystem die Mathematik ohnehin auf unnatürliche und ahistorische Weise in nahezu fremde Teile zerlegen soll, brauchen von den Zielgruppen der Empfehlungen doch wenigstens Eltern und Schüler einige Erläuterungen zur Frage "Was soll welche Mathematik auf der Oberstufe?".

Natürlich ist es äußerst schwierig und im Resultat leicht anfechtbar, eine Antwort auf diese Frage zu versuchen. Aber spätestens bei Beginn einer Reform die wie diese den Inhalt trifft, muß diese Frage beantwortet werden, sonst bleibt die Reform sachfremd. In den Empfehlungen überläßt man es dem sachkundigen Leser, das zu Grunde liegende Konzept aufzuspüren. Folgendes läßt sich aber nach Durcharbeiten des Textes zeigen:

a) Die Stoffauswahl und -gliederung folgt der des Grundstudiums in Mathematik an den meisten deutschen Universitäten.

b) Mathematik wird als ein nach oben offenes Gebäude auf solidem und unanfechtbarem Fundament (Mengenlehre, math. Logik, Axiomatik) gelehrt.

c) Auf Kontinuität mathematischer Problemstellungen wird verzichtet (Kurssystem!).

d) Auf Anwendungen im außermathematischen Bereich wird fast völlig verzichtet, parallellaufende Physikkurse können kaum Mathematik voraussetzen (Kurssystem!).

e) Das überwiegende Gewicht bei den Lernzielen liegt auf 'Schulung formalen Schließens und exakten Beweisens'. Math. Zusammenhänge fehlen. (Kurssystem!)

f) Es wird vom Allgemeinsten zum Besonderen geschritten.

g) Die kreative Komponente der Mathematik kommt nur im Erarbeiten von Definitionen zum Zuge, und die kann der Lehrer allzu häufig nicht ernsthaft motivieren (e.g.: Stetigkeit, Grundstrukturen z.B. Ringe u.Körper, komplexe Zahlen, Skalarprodukt, R^n, etc.).

h) Im Vordergrund steht das zeitlich und didaktisch gerade-noch-Definierbare. Das führt zu einem Überangebot an Klein-Vorlesungen, deren Thema verordnet werden muß, weil der "Stoff" dem Laien undurchsichtig bleiben muß.

Damit kommen wir zur Untersuchung der Einzelheiten in den Empfehlungen.

Details: ANALYSIS

"Es war einmal ein Mann, der lernte das Drachentöten und gab sein ganzes Vermögen dafür hin. Nach drei Jahren hatte er die Kunst erlernt, aber er fand keine Gelegenheit sein Können anzuwenden."

Dschuang Dsi
(zitiert nach Th. Bröcker)

Da begann er, das Drachentöten zu lehren.
(R. Thom an Th. Bröcker)

"The method of exposition we have chosen is axiomatic and abstract, and normally proceeds from the general to the particular. This choice has been dictated by the main purpose of the treatise, which is to provide a solid foundation for the whole body of modern mathematics.... It follows that the utility of certain considerations will not be immediately apparent to the reader unless he has already a fairly extended knowledge of mathematics; otherwise he must have the patience to suspend judgement until the occasion arises."

N. Bourbaki

"So kommt es, daß viele Vertreter der Analysis das Bewußtsein der Zusammengehörigkeit ihrer Wissenschaft mit der Physik und anderen Gebieten verloren haben, während auf der anderen Seite oft den Physikern das Verständnis für die Probleme und Methoden der Mathematiker, ja sogar für deren ganze Interessensphäre und Sprache abhanden gekommen ist. Ohne Zweifel liegt in dieser Tendenz eine Bedrohung für die Wissenschaft überhaupt; der Strom der wissenschaftlichen Entwicklung ist in Gefahr, sich weiter und weiter zu verästeln, zu versickern und auszutrocknen. Soll er diesem Geschick entgehen, so müssen wir einen guten Teil unserer Kräfte darauf richten, Getrenntes wieder zu vereinigen, indem wir unter zusammenfassenden Gesichtspunkten die inneren Zusammenhänge der mannigfaltigen Tatsachen klarlegen. Nur so wird dem Lernenden eine wirkliche Beherrschung des Stoffes ermöglicht und dem Forscher der Boden für eine organische Weiterentwicklung bereitet."

R. Courant

Kritik des Analysis-Konzepts der "EMPFEHLUNGEN"

Auf die Analysis wird in den Empfehlungen mit Recht besonderes Gewicht gelegt: Außer dem nicht-mathematischen Eingangskurs sind nur Analysiskurse für alle Schüler verbindlich. Dabei wird Stetigkeits- und Konvergenzfragen ein bisher nicht dagewesenes Gewicht verliehen *). Wir erinnern daher in Teil I zunächst daran, daß das jedenfalls keinen mathematischen Grund hat. Dazu geben wir eine größere Anzahl von Gliederungen für mathematisch einwandfreie Analysiskurse an, die nicht - wie die Empfehlungen - Vollständigkeit und Stetigkeit an den Anfang stellen. Wir haben dabei eine übersichtliche Erläuterung der wichtigen Sätze im Aufbau der Analysis angestrebt, nicht schulreife Kursempfehlungen.

Teil II enthält unser eigentliches Anliegen, die Kritik des Analysiskonzepts der Empfehlungen. Wir versprechen uns dabei den größten Erfolg, wenn wir zeigen, in welche mathematische Katastrophe es führt, wenn man den Empfehlungen folgt. Die Empfehlungen selber geben nur Überschriften, sind also für sich allein zu ungenau für eine sorgfältige Analyse. Dafür zitieren sie zwei für die Schule geschriebene Bücher: "Griesel" **) und "Schwannwerk" +). Das Schwannwerk ist so ausführlich ++), daß der schwierigste Teil des Unterrichts - die richtige Auswahl und Zusammenstellung des Stoffes - dem Lehrer überlassen bleibt. Griesel hingegen bietet eine Stoffauswahl an, die im Unterricht auch behandelt werden kann. Außerdem folgen die Empfehlungen Griesel meistens Überschrift für Überschrift. Wichtig ist uns auch, daß das Buch von Griesel sich rasch verbreitet hat, daß viele Lehrer seinen Lehrgang und seine Auswahl praktikabel gefunden haben. Wir werden zeigen, daß die Behandlung der Analysis bei Griesel - so weit es die schwierigen Sätze angeht - nur als

* Selbst im Grundkurs wird allen Ernstes vorgeschlagen, ein halbes Jahr lang Konvergenz (z.B. Bolzano-Weierstraß) und Stetigkeit ("auf den Beweis des Zwischenwertsatzes sollte nicht verzichtet werden") zu behandeln. Das Wort "differenzierbar" fällt für Grundfach-Schüler zum ersten Mal im dritten Halbjahr Oberstufe!

**Analysis I+II, Unterrichtshefte zur Mathematik von heute, Schroedel-Verlag und Schöningh-Verlag 1968/72.

\+ Mathematikwerk für Gymnasien, Analysis I, Schwann-Verlag, 1970.

++Erstes Halbierungsverfahren S.64, geometrische Reihe S.105, Grenzwerte bei Funktionen ab S. 132 (ohne Benutzung der Folgen), Differentialrechnung ab S. 167, Integralrechnung ab S. 245 (nicht mehr lückenlos, Verweis auf Band II).

Entstellung bezeichnet werden kann §). Das hat sich weder bis zur vierten Auflage geändert, noch wird in den Empfehlungen ein Wort über diese Fehler verloren §§). Wir argumentieren daher, daß die Fehler bei Griesel beispielhaft sind, daß sie die Regel sein werden, wenn das Konzept der Empfehlungen verbindlich wird.

Uns ist klar, daß dies Vorgehen Herrn Griesel gegenüber unfair ist. Wir glauben aber, daß wir viele Lehrer ansprechen können, wenn wir uns auf ein Buch beziehen, mit dem sie gut gearbeitet haben. Wir glauben auch, daß Herr Griesel die Bekämpfung dieser Empfehlungen für notwendig halten wird und daher Verständnis für unser Verfahren haben kann.

T E I L I — In welchem Rahmen sollte sich die Analysis auf der Schule bewegen?

Hier sind eine Reihe ganz verschiedener Antworten möglich, die auch von dem Anspruchsniveau abhängen, das man stellen möchte. Ehe wir dazu einige Vorschläge machen, stellen wir fest:

> Für die Schule steht die Bedeutung der Begriffe Ableitung und Integral weit über dem Stetigkeitsbegriff.

Zur Erläuterung erinnern wir an einige historische Tatsachen.

§ Es wird sich nicht um logische oder mathematische Spitzfindigkeiten handeln, jeder Lehrer wird unsere Analyse nachvollziehen können.

§§ Wo die Empfehlungen vom Griesel abweichen, geben sie nur diesen "schwierigen Sätzen" eine größere Bedeutung und machen die Fehler um so gravierender.

Der Funktionsbegriff wurde entwickelt, um zur Beschreibung physikalischer Bewegungsvorgänge ein mathematisches Modell zu haben. Die meisten physikalischen Bewegungen sind nicht linear, so daß nicht unmittelbar klar war, was die Geschwindigkeit sein sollte. Differenzierbare Funktionen wurden eingeführt, weil man sie im Kleinen als linear ansehen konnte, so daß ein sinnvoller Geschwindigkeitsbegriff definierbar wurde. (Das ist eine außerordentlich typische Situation: Außermathematische Objekte werden durch ein mathematisches Modell beschrieben; das Modell ist leider sehr kompliziert, also muß man versuchen, wesentliche Aspekte mit einfacheren mathematischen Begriffen zu beschreiben.) Die Differential- und Integralrechnung entwickelte sich dann innerhalb von etwa 150 Jahren zu einer eindrucksvollen und bei Anwendung erfolgreichen Theorie, bevor es erst um 1850 gelang, eine (unsere heutige) präzise Stetigkeitsdefinition zu geben. (Die Stetigkeitsmotivierer sollten das immer vor Augen haben.)
Daß diese Entwicklung möglich war, liegt unter anderem daran, daß die Differentialrechnung der algebraischen Funktionen unabhängig von Grenzwertbegriffen ist. Außerdem hat Laugwitz gezeigt, daß schon die aller undeutlichsten Vorstellungen davon, was " stetig " heißen soll, notwendig zu dem Kalkül der Differentialrechnung führen, den wir alle kennen! (" Ist Differentialrechnung ohne Grenzwert möglich? " Reprint Nr. 58, Darmstadt 1973 .)–In jenen ersten 150 Jahren trat das (für den Erfolg) wesentliche auch viel klarer hervor als in der heutigen Schulmathematik: Die Differentialrechnung handelt davon, komplizierte Funktionen mit Hilfe linearer Funktionen zu untersuchen. (Dieser Meinung ist auch Griesel, Vorwort S. 7; vor den im Vergleich zu den tatsächlich behandelten Sätzen harmlosen Konsequenzen schreckte er aber zurück.)

Nichts derartiges läßt sich über den Stetigkeitsbegriff sagen. Die Stetigkeitsdefinition ist eine rein technische innermathematische Angelegenheit. Was eine stetige Raumkurve ist, hat man erst 1880 aus Peanos Beispiel gelernt; zum Vergleich: Gauß 1777 – 1855. Für die Theorie der stetigen Funktionen (ohne weitere

Voraussetzungen) gibt es keine außermathematischen Anwendungen und keinen entwickelten Kalkül. Die Stetigkeitsdefinition ist trotz aller ε - δ - Streifen eine ihrem Wesen nach formale und unanschauliche Definition, weil es sich darum handelt, die Allgemeingültigkeit eines Verfahrens einzusehen. (Zu jedem $\varepsilon>0$ gibt es ein $\delta>0$, so daß ..., bzw. ein $n(\varepsilon)$, so daß...– nicht nur für die endlich vielen ε, für die Zahlenbeispiele oder Zeichnungen vorgeführt werden können.) Schließlich ist es ganz einfach nicht wahr, daß man sich die Graphen stetiger Funktionen oder gar stetige Kurven vorstellen kann – wer dieser Meinung ist, hat (zum Glück ?) den naiven Stetigkeitsbegriff von Leibniz und Newton, der nichts mit der klassischen Definition zu tun hat. (Schwannwerk S. 167: Eine Funktion ist stetig, wenn der Funktionsgraph eine nirgends unterbrochene Linie ist!!!)
Niemand außer späteren Mathematikern wird je dem Stetigkeitsbegriff begegnen, und niemand bekommt schon auf der Schule die richtige Intuition zu diesem Begriff, z.B. weil die Funktionen, die zeigen, wie unangenehm die Stetigkeitsdefinition ist, gar nicht erklärt werden können.
Diese historischen Tatsachen sind eine Bestätigung unserer Ansicht, daß das Thema "Stetigkeit und deren Zusammenspiel mit der Vollständigkeit der reellen Zahlen" nicht auf die Schule gehört.

Da wir jedoch nicht annehmen, daß wir jeden Leser davon überzeugt haben, werden wir bei den nun folgenden Vorschlägen die verschiedenen klassischen Varianten des Aufbaus der Analysis auf der Schule berücksichtigen. Unsere Absicht ist es, verschiedene Skelette für einen solchen Aufbau anzugeben; wir beschränken uns darauf zu sagen, in welcher Reihenfolge die wesentlichen Definitionen und die schwierigen Sätze gebracht werden können und welche Konsequenzen das im späteren Aufbau hat. (Nach unserer Durchsicht der Schulbuchliteratur scheint dafür der größte Bedarf zu bestehen.) Wir verzichten darauf, auf einen dritten Leistungskurs einzugehen (vorgesehene Themen in den Empfehlungen: Differentialgleichungen, Taylorformel).

Wir beurteilen den Stoff wie folgt:

1. Sätze über stetige Funktionen sind nur in so weit von irgend welchem Interesse, wie der jeweilige Aufbau sie als Beweismittel benötigt.
2. Die Differentiationsregeln $\left((f+g)'=f'+g' \text{ bis } (F\circ f)'=(F'\circ f)\cdot f'\right)$ führen nur das Berechnen der Ableitungen komplizierter Funktionen auf einfachere zurück, sonst nichts. Bei der Suche nach Anwendungen der Differentialrechnung auf diesem Niveau kann man daher keine

wesentlich anderen Probleme lösen, als man schon bei quadratischen Funktionen ohne Differentialrechnung lösen kann, (Extremwertaufgaben hauptsächlich). - Diese Situation ändert sich übrigens, wenn man statt Abbildungen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auch Abbildungen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ ("Kurven") betrachtet. Da die Behandlung komponentenweise geschieht, sind keine größeren Kenntnisse der Differentialrechnung notwendig. Dafür kann man jetzt Anwendungen in der Physik besprechen, ohne immerzu mit der Verwechslung von Bahnkurve und Graph der Abbildung kämpfen zu müssen. Auch, daß die Ableitung etwas mit linearen Abbildungen zu tun hat, ist im $\mathbb{R}^3$ -im Gegensatz zum $\mathbb{R}^1$ — nicht nur nützlich sondern weit mehr: anschaulich (vgl. Leibniz und Newton).

3. Der einzige Satz, der aus Eigenschaften der Ableitung auf Eigenschaften der Funktion schließt, ist der Mittelwertsatz der Differentialrechnung: $f(y) - f(x) = f'(\xi)\cdot(y-x)$, $\xi \in (x,y)$ und seine Korollare: "$f' \geq 0 \Rightarrow f$ nicht fallend",
"$f'(a)=0$, $f''(a)<0 \Rightarrow f$ hat ein lokales Extremum bei a."
Diese zentrale Bedeutung des Mittelwertsatzes (die sich in seinen Anwendungen auf die Theorie und auf die Praxis spiegelt) muß auf jeden Fall deutlich gemacht werden. Der Mittelwertsatz ist für die Schule der am schwierigsten zugängliche Satz; er muß über den Maximumsatz stetiger Funktionen bewiesen werden. Einfacher und für die Schule völlig ausreichend ist:

$$m \leq f' \leq M \text{ und } x \leq y \quad \Rightarrow m\cdot(y-x) \leq f(y)-f(x) \leq M\cdot(y-x) \,!$$

Die beiden Korollare folgen auch hieraus.

4. Um den Definitionsbereich der Umkehrfunktion f^* einer differenzierbaren monotonen Funktion f zu bestimmen, (~~vgl. S. 4 oben, S. 6 oben~~) benötigt man den Zwischenwertsatz für f. (Hierfür gibt es einen stark vereinfachten Beweis, falls man zusätzlich $f' \geq m > 0$ weiß; dies ist in allen Anwendungen auf der Schule der Fall.)

5. Die Definition des Integrals und der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist verantwortlich für die Leistungsfähigkeit des Kalküls. Dieses Thema kann bei jedem Aufbau befriedigend behandelt werden.

6. Die Vollständigkeit von R (z.B. Intervallschachtelungen) und das Archimedes-Axiom werden zum Beweis von Grenzwertsätzen

und Differentiationsregeln nicht benötigt. Das Archimedes-Axiom ist (bei der Behandlung von Folgen unvermeidlich. Es ist) gleichwertig damit, daß $\{\frac{1}{n}\}$ eine Nullfolge ist. Die Vollständigkeit von R wird für 3., 4., 5. benötigt. Der Mittelwertsatz 3. wird mehr oder weniger stark in 5. benötigt.
Die Bedeutung der Vollständigkeit läßt sich am besten bei der Integralrechnung erläutern. Die Existenz von Quadratwurzeln ist wesentlich harmloser als die Vollständigkeit. Schon Euklid hat Gleichungen mit inkommensurablen Streckenverhältnissen (die wir durch Quadratwurzeln beschreiben würden) behandelt. Er konnte Quadratwurzeln so genau, wie er wollte, durch rationale Zahlen approximieren. Das ist zu Beginn des Analysisunterrichts sicherlich gut genug.

7. Es ist wichtig, die beim Aufbau der Theorie benutzten Argumente auch bei der Besprechung von Beispielen zu verwenden. Es geht nicht, daß bei der Behandlung von Γ, log, exp, sin, cos an entscheidenden Stellen Lücken bleiben, während die benötigten Argumente ohne Bedenken zum Beweis theoretischer Sätze benutzt werden.

Folgende Entscheidungen müssen getroffen werden:

1. Soll der Lehrgang mit Folgen oder Funktionen beginnen?
2. Wie früh und in welchem Umfang wird die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ besprochen?
3. Von welcher Stelle an sollen keine unbewiesenen Sätze mehr verwendet werden?
4. Wird das Integral vom Problem des Flächeninhalts her oder über die Umkehrung des Differenzierens eingeführt?

— — — — —

Wir beginnen mit drei Vorschlägen zur Differentialrechnung. Die beiden ersten sind den meisten Lehrern im wesentlichen vertraut, der dritte bringt die stärksten Vereinfachungen. Anschließend bringen wir zwei Vorschläge zur Integralrechnung.

1. Ausgangspunkt Folgen

Der Grenzwertbegriff bei Folgen wird von denjenigen, die eher dynamische Grenzwertvorstellungen haben (n "gegen" ∞, x "gegen" a), als wesentlich einfacher empfunden als der Grenzwert bei Funktionen. Daher ist dieser Ausgangspunkt verbreitet. Es gibt keinen sachlichen (oder didaktischen)

Grund, das Axiom von der Intervallschachtelung gleich zu Anfang auftreten zu lassen - womöglich als "von der Mittelstufe bekannt". Die Grenzwertdefinition, die Sätze über Summe, Produkt usw. von Grenzwerten, die Konvergenz der zunächst auftretenden Beispiele ($\{\frac{a}{n}\}$, $\{c\cdot q^n\}$ und daraus abgeleitete) haben <u>nichts</u> mit Intervallschachtelungen zu tun. Wer exakt sein will, sollte nicht stillschweigend unterschlagen, daß das Archimedes-Axiom für die Konvergenzbeweise bei diesen Beispielen gebraucht wird. Das ist keine gravierende Forderung, denn man kann es in der Form aussprechen "$\{\frac{1}{n}\}$ ist eine Nullfolge"! Darauf werden dann die übrigen Beispiele zurückgeführt. - Wer den Folgen besonderes Gewicht verleihen will, wird jetzt (also vor der Besprechung von Funktionen) die Vollständigkeit ansteuern; aber es ist <u>sinnlos</u>, das Axiom von der Intervallschachtelung einzuführen, wenn man nicht auch Folgen mit nichtrationalem Grenzwert bringt, z.B. $a_n \to \sqrt{a}$. -- Üblicher Weise wird nun die Stetigkeitsdefinition auf die Konvergenz von Folgen zurückgeführt, und es werden die einschlägigen Sätze bewiesen. Später, bei der eigentlich interessierenden Besprechung differenzierbarer Funktionen wird dann nur auf weit zurückliegende Sätze verwiesen. Ebensogut kann man direkt definieren: "f heißt differenzierbar bei a, wenn für jede gegen a konvergente Folge $\{a_n\}$ ($a_n \neq a$) die Folge der Sehnensteigungen konvergiert, d.h. wenn $\frac{f(a_n) - f(a)}{a_n - a}$ einen Grenzwert besitzt". (Dies Zurückführen von Grenzwerten bei Funktionen auf Grenzwerte bei Folgen ist weit verbreitet, obwohl viele Mathematiker die Formulierung "Für <u>jede</u> gegen a konvergente Folge $\{a_n\}$" <u>nicht</u> für intuitiv einfach halten und bezweifeln, daß damit eine gute Intuition für das Verhalten von Funktionen gefördert wird.) Mit dieser Definition können die Differentiationsregeln und die Differenzierbarkeit der algebraischen Funktionen gezeigt werden, ohne die Vollständigkeit oder Sätze über stetige Funktionen zu benutzen. Man kann z.B. bei Griesel nachlesen, daß in der Tat kein nennenswerter Gebrauch davon gemacht wird. - Die Differentialrechnung kann auf diese Weise wesentlich früher behandelt werden, außerdem werden die Sätze über differenzierbare Funktionen an Ort und Stelle bewiesen und nicht auf weit zurückliegende Sätze zurückgeführt. -- Wer die Vollständigkeit nicht frühzeitig einführen will und wer - wie zur Zeit üblich - die sorgfältige Behandlung des Mittelwertsatzes und der Umkehrfunktionen hinter die Integralrechnung verschiebt, der kann (ohne mathematische Hindernisse) warten, bis er bei der Definition des Integrals zwangsläufig über die Vollständigkeit reden muß - und das nun auch ohne Motivationsschwierigkeiten kann.

<u>2. Ausgangspunkt Funktionen</u>

Wer beim Grenzwertbegriff mehr die Vorstellung im Vordergrund sieht, daß zu jeder vorgelegten Ungleichung $|a_n - a| < \varepsilon$ bzw. $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ eine Ungleichung gefunden werden muß, die die erste impliziert, also $n \geq n(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$ bzw. $|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$, der wird keinen großen Unterschied in der Schwierigkeit des Grenzwertes bei Folgen und Funktionen sehen. Man kann dann der Physik und des interessanteren Stoffes wegen sofort mit Funktionen beginnen und Folgen als Hilfsmittel betrachten, die spätestens beim Auftauchen der Vollständigkeit, d.h. spätestens bei der Integration, kurz behandelt werden müssen. Wie eben besteht keine logische Notwendigkeit, die Stetigkeit einzuführen, da man direkt definieren kann: " f heißt differenzierbar bei a, wenn der Differenzenquotient $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ bei a einen Grenzwert m besitzt" oder - logisch gleichwertig, mathematisch und physikalisch besser und leichter zu motivieren-wenn f sich bei a gut linear approximieren läßt, d.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß gilt $|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - (f(a) + m\cdot(x-a))| \leq \varepsilon \cdot |x-a|$.

Da diese Implikation ohnehin der wichtigste Teil der Differentialrechnung ist, schadet es gar nichts, wenn man einen Teil der vielen eingesparten Zeit benutzt, um die hierdurch ausgedrückte Eigenschaft von f genauer an Hand von Beispielen zu besprechen, als das zur Zeit geschieht. (Im Schwannwerk liegt die Betonung ausschließlich auf dem Beweis allgemeiner Sätze.) Wie im ersten Vorschlag folgen die Differentiationsregeln und die Differenzierbarkeit der algebraischen Funktionen ohne die Vollständigkeit. - Übrigens ergibt sich in diesem Aufbau die gleichmäßige Approximierbarkeit der algebraischen Funktionen durch Treppenfunktionen gleich aus den Differentierbarkeits-Beweisen mit. (Im Prinzip gilt das auch für den ersten Vorschlag; da dort jedoch die meisten Beweise üblicher Weise indirekt geführt werden, wird man praktisch bei der Approximation durch Treppenfunktionen mehr Mühe haben.)

Wir wiederholen: Man erhält den <u>Kalkül</u> der Differentialrechnung (d.h. ohne die schwierigen Sätze) ohne die Vollständigkeit zu benutzen und im zweiten Fall auch ohne das Archimedes-Axiom.

3. Verzicht auf den klassischen Grenzwertbegriff.

Dieser Vorschlag ist für all die interessant, die aus den vielen Mißerfolgen mit dem klassischen Grenzwertbegriff die Konsequenz ziehen wollen, ihn ganz zu vermeiden. Man kann entweder mit Folgen beginnen, betrachtet aber nur geometrisch konvergente Folgen, d.h. " Es gibt $0 \leqslant q < 1$ so daß für alle $n \in \mathbb{N}$: $|a_n - a| \leqslant \text{const}\cdot q^n$ " (Z.B. Dezimalbrüche, $q = \frac{1}{10}$). Geometrische Konvergenz ist so bequem, daß die Beweise der Grenzwertsätze völlig harmlos werden. Geometrische Konvergenz genügt zur Beschreibung der Vollständigkeit von R in allen vorkommenden Existenzbeweisen (einschließlich Bolzano-Weierstraß, falls man ihn nicht lassen kann). Man benötigt das Archimedes Axiom, um zu zeigen, daß eine Folge höchstens gegen einen Grenzwert geometrisch konvergent sein kann.

Wie eben kann man die Behandlung der Folgen verschieben, bis man sie bei der Integration zur Erklärung der Vollständigkeit braucht. Alle auf der Schule und in Anwendungen vorkommenden Funktionen verhalten sich nämlich weit besser als typische stetige Funktionen. Es läßt sich z.B. immer leicht die folgende anschauliche (!) Eigenschaft beweisen:

$$|f(y) - f(x)| \leqslant \text{const}\cdot|y - x| \quad \text{für alle } x,\ y \in [a,b] .$$

(Ausnahmen wie $f(x) = \sqrt{x}$ bei $a = 0$ kommen vor!)

Ein Beispiel : $\left|\sqrt{y} - \sqrt{x}\right| = \frac{|y - x|}{\sqrt{y} + \sqrt{x}} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{a}}\cdot|y - x|$ möge stellvertretend zeigen, daß sich die auftretenden Konstanten praktisch sehr leicht berechnen lassen. ε-δ-Implikationen kommen nicht vor. Für diese Lipschitzstetigen Funktionen sind die Beweise der üblichen Sätze weit einfacher als im klassischen Fall:

Beispiele: f ist beschränkt:

wegen $|f(x)| = |f(x) - f(a) + f(a)| \leqslant \text{const}\cdot|x - a| + |f(a)|$
$\leqslant \text{const}\cdot|b - a| + |f(a)|$

(Ohne Vollständigkeit !)

$F \circ f$ ist Lipschitz-stetig, falls F und f es sind:

wegen $|F\circ f(y) - F\circ f(x)| \leqslant \text{const}(F)\cdot|f(y) - f(x)|$
$\leqslant \text{const}(F)\cdot\text{const}(f)\cdot|y - x|$.

Verschärft man nun auch die Differenzierbarkeitsbedingungen bei a zu

$|f(x) - (f(a) + m\cdot(x - a))| \leqslant \text{const}\cdot|x - a|^2$ für $x, a \in [c,b]$,

(oder logisch gleichwertig : $\left|\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - m\right| \leqslant \text{const}\cdot|x - a|$;
m heißt auch $f'(a)$)

so bekommt man ähnlich einfache Beweise aller Differentia-tionsregeln und natürlich auch die Differenzierbarkeit der algebraischen Funktionen ohne Vollständigkeit.

Ganz besonders heben wir hervor:

Der abgeschwächte Mittelwertsatz, also

$$\left.\begin{array}{l} m \leqslant f' \leqslant M \\ x \leqslant y \end{array}\right\} \Rightarrow m\cdot(y - x) \leqslant f(y) - f(x) \leqslant M\cdot(y - x)$$

folgt für die hier betrachteten Funktionen ohne die Vollständigkeit allein aus dem Archimedes - Axiom:

Betrachte g : $g(x) := f(x) - M\cdot x$, also $g' \leqslant 0$.

Wir haben zu zeigen $g(y) - g(x) \leqslant 0$

Teile das Intervall $[x,y]$ in n gleiche Teile, und benutze für jedes Teilintervall (die Konstante hängt nur von $[a,b]$ ab)

$$|g(x_{k+1}) - (g(x_k) + g'(x_k)\cdot(x_{k+1} - x_k))| \leqslant \text{const}\cdot(x_{k+1} - x_k)^2 .$$

Es folgt wegen $g' \leqslant 0$

$$g(y) - g(x) \leqslant n\cdot\text{const}\cdot\frac{(y - x)^2}{n^2} = \frac{1}{n}\cdot\text{const}\cdot(y - x)^2 .$$

Dies gilt für jedes n, also nach Archimedes $g(y) - g(x) \leqslant 0$.

Ende des Beweises !

Dies ist besonders wichtig, da das Korollar "$f' = 0 \Rightarrow f = \text{const.}$" sich in der Integralrechnung kaum umgehen läßt. - Die Vollständigkeit empfehlen wir, bei der Integration zu besprechen, es sei denn, man behandelt vor den Funktionen ausführlich konvergente Folgen. — Die Umkehrfunktionen und der vereinfachte Zwischenwertsatz (s.o. 5.) folgen anschließend.

Sieht man davon ab, daß man die Einführung des Integrals an den bisherigen Aufbau anpassen muß, so bestehen in jedem Fall mindestens zwei wesentlich verschiedene Möglichkeiten.

Erstens. Ausgangspunkt ist das Problem des Flächeninhalts krummlinig begrenzter Figuren, z.B. $\{(x,y);\ a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$. Dann approximiert man die vorgelegte Funktion f durch Treppenfunktionen. (Das ist, auch wenn f nur stetig ist, bedeutend leichter als der Beweis der Intervalladditivität bei Griesel, II S. 33-35; diese Schwierigkeiten rühren daher, daß der präzise Umgang mit oberen Grenzen mehr logische Sorgfalt erfordert als andere Vollständigkeitsformulierungen.) Im Hinblick auf die angestrebten Anwendungen genügt es, Lipschitz-stetige Funktionen (z.B. stetig differenzierbare) zu integrieren; für diese ist die Approximation durch Treppenfunktionen von oben und unten offensichtlich!

Nämlich: Für $x, y \in [a,b]$ sei $|f(y) - f(x)| \leqslant L \cdot |y - x|$.
Weiter sei $a = x_o < x_1 < \ldots. < x_n = b$ so daß $(x_k - x_{k-1}) \leqslant \frac{1}{L} \cdot \varepsilon$
(Archimedes !).

Setze : $T(x) := f\left(\frac{x_k + x_{k-1}}{2}\right) + L \cdot \frac{x_k - x_{k-1}}{2}$ für $x \in (x_{k-1}, x_k)$

$t(x) := f\left(\frac{x_k + x_{k-1}}{2}\right) - L \cdot \frac{x_k - x_{k-1}}{2}$ für $x \in (x_{k-1}, x_k)$

Dann gilt $t(x) \leqslant f(x) \leqslant T(x) \leqslant t(x) + \varepsilon$.

Außerdem halbiert sich der Fehler der Approximation bei Halbierung der Unterteilungsintervalle, so daß die beiden Folgen der Integrale der Untertreppen bzw. der Obertreppen eine geometrische Intervallschachtelung bilden, d.h. die Intervallbreiten sind $\leqslant const \cdot 2^{-n}$. Das ermöglicht die Definition des Integrals und führt von der Sache her dazu, über die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ und ihre Bedeutung zu sprechen. Linearität, Monotonie und Intervalladditivität werden durch Approximation auf Sätze über endliche Summen zurückgeführt. Diese Einführung ist unabhängig von der Differentialrechnung, so daß der Hauptsatz der Differential - und Integralrechnung als außerordentliches Resultat erscheint. Die Integrationsregeln folgen als Anwendungen. - Will man sich nicht auf die Integration von Treppenfunktionen und Lipschitz-stetigen Funktionen beschränken, sondern stetige Funktionen integrieren, so kommt man nicht ohne weiteres mit geometrisch konvergenten Folgen aus; man benötigt (die klassische Konvergenzdefinition oder) den Satz von der oberen Grenze. Eine Rechtfertigung für die Schule scheint nicht zu existieren, denn wer wird je schlechtere als Lipschitz-stetige Funktionen integrieren?

Die zweite Einführung des Integrals beginnt mit der Frage nach der Umkehrung der Differentiation. Man nennt F Stammfunktion von f falls $F' = f$. Der wichtigste nichttriviale Satz ist: Zwei Stammfunktionen F, G von f unterscheiden sich um eine Konstante - weil $(F - G)' = 0$. Wir betonen mit Nachdruck (weil das aus der verbreiteten Darstellung Griesels nicht hervorgeht), daß dieser Aufbau entscheidend auf dem Korollar " $f' = 0 \Rightarrow f = const$ zum Mittelwertsatz der Differentialrechnung beruht. Man erhält dann eine

Theorie von der Umkehrung der Differentiation, die eindrucksvoll aussieht, (z.B. mit partieller Integration), bis vielleicht ein Schüler die Frage stellt, welche (wieviele) Funktionen denn eigentlich Stammfunktionen besitzen. Dann muß man also Stammfunktionen zu konstruieren versuchen. Die nun schon vorhandenen Integrationsregeln, insbesondere die Monotoniesätze ($f \leqslant g \wedge F(0) = G(0) \Rightarrow F \leqslant G$) führen dazu, den Flächeninhalt unter dem Graphen von f für einen Kandidaten einer Stammfunktion zu halten. (An dieser Stelle ist die Motivation im Griesel noch sehr verbesserungsbedürftig). Nun wird das Integral wie im ersten Vorschlag definiert. Bei diesem Aufbau gilt der Hauptsatz der Differential - und Integralrechnung nach Definition; der Hauptsatz dieser Theorie ist, daß unerwartet viele Funktionen Stammfunktionen besitzen! (Statt über die Approximation durch Treppenfunktionen kann das Unterintegral als Supremum aller Integrale von Untertreppen definiert werden, ohne Rücksicht auf die Approximationseigenschaften der Treppenfunktionen. Entsprechend das Oberintegral. Jeder Lehrer möge an Hand des Griesel und unserer Kritik dazu (o.ä.) selbst entscheiden, ob er sich und seinen Schülern das zutraut.)

Zusammenfassend stellen wir fest: Wir haben wenigstens einen Aufbau der Analysis angegeben, der die Schwierigkeiten der klassischen Stetigkeits - und Grenzwertdefinition völlig vermeidet und doch alle wichtigen Sätze zu erreichen gestattet, indem er sich auf Lipschitzstetige Funktionen beschränkt. Wir haben mehrere Möglichkeiten angegeben, in die Analysis einzusteigen, ohne sich mit den schwierigen Stetigkeitssätzen und Vollständigkeitsfragen gleich am Anfang herumschlagen zu müssen. Insbesondere haben wir hervorgehoben, daß die Vollständigkeit mit den Anfängen der Differentialrechnung nichts zu tun hat und daher erst zu behandelt werden braucht, wenn Probleme des Unterrichts von allein zu ihr führen. (Die Schüler verfügen dann über mehr Routine als am "Ende der Mittelstufe" !) Unbeantwortet gelassen haben wir die Behandlung des klassischen Mittelwertsatzes der Differentialrechnung und des Zwischenwertsatzes für stetige Funktionen. Diese Sätze können nicht anders als z.B. mit dem in den Anfängervorlesungen üblichen Aufwand bewiesen werden und gehören daher nicht in einen ersten oder zweiten Leistungskurs. Die entstehenden Lücken - wenn man so vorgeht - im Aufbau muß man dann bewußt in Kauf nehmen - leider ohne den Schülern die Probleme wirklich klar machen zu können.

Merke: Vor der Auswahl dieser Möglichkeiten ist es unverantwortlich, im Grundkurs AI ein halbes Jahr lang (nach demselben Stoffplan wie im Leistungskurs) nutzlose Stetigkeit zu machen.

T E I L II

Wir hoffen, daß unsere Leser an dieser Stelle einen einigermaßen deutlichen Eindruck von unseren Vorstellungen zur Analysis haben. Insbesondere sollte daraus hervorgehen, daß es unnötig ist, die Analysis auf der Schule auf dem Stetigkeitsbegriff aufzubauen. -- Wir kommen nun auf unser eigentliches Anliegen zurück, wir wollen begründen, daß es nicht nur nicht nötig, sondern sogar verhängnisvoll ist, die Schulanalysis auf dem Stetigkeitsbegriff aufzubauen.

Bitte erinnern Sie sich im folgenden daran, daß es sich nicht darum handelt, Herrn Griesel Fehler nachzuweisen. Vielmehr möchten wir all die Lehrer ansprechen, die diese Fehler auch gemacht haben (oder diese Klippen ganz vermieden haben), um ihnen dramatisch vor Augen zu führen, wohin diese Empfehlungen sie bringen.

These zur Analysis

Folgt man dem Stoffplan (mit Literaturangaben) der Empfehlungen, so wird in Zukunft gelehrt werden:

> Die schwierigen Sätze der Analysis sind nicht einmal für die einfachsten Anwendungen nützlich; auch im Aufbau der Theorie sind sie Verweisen auf die unmittelbare Anschauung hoffnungslos unterlegen.

Dabei meinen wir mit schwierigen Sätzen diejenigen, die die Volständigkeit von $\mathbb{R}$ wesentlich benutzen.

Noch eine Vorbemerkung. Griesel hat sich dafür entschieden, das Axiom von der Intervallschachtelung an den Anfang zu stellen und das Archimedes-Axiom ("$\{\frac{1}{n}\}$ist Nullfolge") an das Ende des zweiten Bandes zu verschieben. Wir sehen keinen Grund für dieses Vorgehen; sowohl der intuitive Gehalt des Archimedes-Axioms ("es hängt nur von den ersten, nicht den unendlich vielen letzten Dezimalstellen ab") als auch seine Anwendung in Beweisen ("Vergleich von anderen Nullfolgen mit $\{\frac{1}{n}\}$") ist wesentlich harmloser als beim Voll-

ständigkeitsaxiom. Da die explizite Erwähnung jenes Axioms bisher selten ist, heben wir im folgenden hervor, wo es benutzt wird. Wir hoffen, daß diese Zusatzinformation unsere Leser nicht davon ablenken wird, hauptsächlich das Vollständigkeitsaxiom und seine Verwendung im Auge zu behalten.

Auf der vierten Textseite des Griesel (I,S.13) wird der Satz von der Intervallschachtelung ohne irgendeinen Kommentar als von der Mittelstufe bekannt aufgeführt. Damit steht die Vollständigkeit der reellen Zahlen in vollem Umfang zur Verfügung. (Auf den nächsten 24 Seiten werden der Funktions - und der Folgenbegriff eingeübt.) Auf Seite 37 folgt die Grenzwertdefinition bei Folgen und nur zwei Seiten weiter wird der Satz von Bolzano - Weierstraß : " Eine beschränkte unendliche Zahlenfolge besitzt mindestens einen Häufungspunkt " bewiesen. Daß dieser Satz bereits eines der gröbsten Geschütze der Analysis ist, wird bis zum Ende des ganzen Lehrganges nicht deutlich. Dem Beweis des Bolzano - Weierstraß geht kein einziger Konvergenzbeweis einer konkreten Folge voraus, obwohl natürlich wesentlich benutzt wird, daß $\{(b-a)\cdot 2^{-n}\}$ eine Nullfolge ist! Wir danken für den Hinweis, daß der Konvergenzbeweis von $\{q^n\}$ auf S.41 als Aufgabe 6c gestellt wird; aber wir bezweifeln, daß das genügt, denn z.B. im Schwannwerk wird die geometrische Reihe bzw. Folge auch nicht gerade konsequent behandelt: Das Archimedes-Axiom wird auf S.46 genannt, aber an keiner benötigten Stelle (S.67, S.73)zitiert. Das erste Halbierungs-verfahren steht auf S.64, die Konvergenzabschätzung der geometrischen Reihe wird auf S.105 mit der nicht in dieser Präzision zur Verfügung stehenden Logarithmusfunktion bewiesen - statt mit der auf S.33 als nützlich hingestellten aber bisher nicht benutzten Bernoullischen Ungleichung $(\frac{1}{q})^n \geqslant 1 + n(\frac{1}{q} - 1)$. --

Zwanzig(!) Seiten nach dem Bolzano-Weierstraß (inzwischen sind Grenzwert - und Stetigkeitssätze ohne diesen Satz behandelt) lesen wir : " Sei $a \geqslant 0$. Unter $\sqrt{a}$ versteht man diejenige nichtnegative Zahl, deren Quadrat a ist. Daß es wirklich eine solche Zahl gibt, und nur eine, setzen wir als bekannt voraus. Beweise hierfür werden wir noch im Heft 0.2 erbringen." - Tatsächlich wird die Existenz von Quadratwurzeln als zweitletztes Resultat des zweiten Bandes bewiesen. (Danach kommt nur noch der Mittelwertsatz der Integralrechnung.)

Übrigens: Für $a \geqslant 1$ konvergiert $a_1 := a$, $a_{n+1} := \frac{1}{2}\cdot(a_n + a/a_n)$ monoton fallend und rascher als jede geometrische Reihe gegen $\sqrt{a}$. Jeder Schüler sieht ein, daß mit a_n auch a/a_n eine Approximation für $\sqrt{a}$ ist und daß $\sqrt{a}$ das geometrische Mittel dieser beiden Näherungen ist. Das Iterationsverfahren berechnet statt des geometrischen das arithmetische Mittel. Wegen $\frac{b+c}{2} - \sqrt{b\cdot c} = \frac{1}{2}(\sqrt{b} - \sqrt{c})^2$

ist die Konvergenz schon von vornherein plausibel. Wer Scherungen behandelt hat, kennt zudem die Steigung der Normalparabel ohne Differentialrechnung; die Iteration ist dann das Newtonsche Verfahren und die Konvergenz ist wegen der Konvexität der Parabel vor jeder Rechnung offensichtlich.
-- Auch im Schwannwerk fanden wir außer $(1 + \frac{1}{n})^n$ (S. 112, ohne Beweis) keine Folge, die etwas Neues liefert, d.h. einen nicht-rationalen Grenzwert hat. Quadratwurzeln werden ohne Kommentar benutzt.--

Wie kann man bei einem solchen Vorgehen Schüler davon überzeugen, daß die Sätze der Analysis etwas taugen? Gibt es irgendeinen Grund, den Satz von Bolzano-Weierstraß zu beweisen, wenn man 20 Seiten weiter vor Quadratwurzeln kapituliert? Gibt es irgend einen Grund, bei der Behandlung von Folgen über die Vollständigkeit zu reden, wenn keine einzige Folge mit nichtrationalem Grenzwert auftritt? Warum eigentlich hat kein Lehrer Herrn Griesel seine Bestürzung hierüber mitgeteilt? - Die vierte Auflage ist in diesem Punkt unverändert.

Griesel behandelt im ersten Band die tieferen Sätze über stetige Funktionen noch nicht;daher ist es richtig, wenn auf I,S.85 erklärt wird, daß aus $f' > 0$ die Monotonie von f noch nicht hergeleitet werden kann (dazu braucht man den Mittelwertsatz der Differentialrechnung). Zwanzig Seiten später ist diese Vorsicht dahin(S.103): Bei den Umkehrfunktionen wird der Zwischenwertsatz nicht erwähnt. Aber ohne den Zwischenwertsatz weiß man nichts über den Wertevorrat von f, also nichts über den Definitionsbereich von f*; trotzdem wird behauptet "$f(f^*(x)) = f^*(f(x)) = x$ für $x \in D$!" (4. Auflage!)
Wir haben uns nicht davon überzeugen lassen können, daß dies nur ein harmloser Druckfehler ist. (Erstens) wird an keiner Stelle des Lehrgangs im Zusammenhang mit Umkehrfunktionen der Zwischenwertsatz erwähnt, (und zweitens wird auf I,S.105 derselbe Fehler in größerer Allgemeinheit noch einmal gemacht: "Falls $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eineindeutig ist (und darin ist ausdrücklich nicht enthalten, daß das Bild von f ganz $\mathbb{R}$ ist, Definition S.101), so gilt:
$f \circ f^* = f^* \circ f = i$ ($i(x) = x$ für $x \in \mathbb{R}$)." - Natürlich ist "$f \circ f^* = i$" i.a. falsch.)

Übrigens, der Zwischenwertsatz folgt aus dem nun einen Band zurückliegenden Satz von der Intervallschachtelung - unter Benutzung des Archimedes Axioms - so : Sei $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, betrachte $f(\frac{1}{2}(a+b))$. Ist $f(\frac{1}{2}(a+b)) = 0$, so hat man eine Nullstelle; ist $f(\frac{1}{2}(a+b)) > 0$, so setze $a_1 := a$, $b_1 := \frac{1}{2}(a+b)$; ist $f(\frac{1}{2}(a+b)) < 0$ so setze $a_1 = \frac{1}{2}(a+b)$, $b_1 = b$. Genau wie im Beweis von Bolzano-Weierstraß wird dies Verfahren wiederholt; es liefert dann entweder nach endlich vielen Schritten eine Nullstelle oder es liefert (mit Archimedes !) eine Intervallschachtelung $[a_n, b_n]$ mit $f(a_n) < 0$, $f(b_n) > 0$. Sei c die in allen Intervallen enthaltene reelle Zahl (I.S.73!); es folgt $\lim_n a_n = c$, $\lim_n b_n = c$ und aus der Stetigkeit von f bei c schließlich: $0 \geq \lim_n f(a_n) = f(c) = \lim_n f(b_n) \geq 0$.

--In Schwannwerk kommen Umkehrfunktionen in der Differentialrechnung nicht vor, obwohl der Zwischenwertsatz behandelt wird!--

Auf der dritten Textseite des zweiten Bandes (II,S.11) steht der Satz von der oberen Grenze : " Jede nach oben beschränkte Menge (reeller Zahlen) besitzt eine obere Grenze." "Wir entnehmen diesen Satz an dieser Stelle der Anschauung, ohne auf seine Beweismöglichkeit einzugehen. Dieser so anschaulich klare Satz hängt mit der sehr tief (!) liegenden Vollständigkeit der reellen Zahlen zusammen. Er wird falsch, wenn man anstelle von $\mathbb{R}$ die Menge $\mathbb{Q}$ zugrunde legt. So hat die Menge $\{x;\ x^2 < 2\}$ .... keine rationale obere Grenze." (Zitat Ende erst hier!)
Schlimmer geht es kaum. Alles was zum Beweis des Satzes von der oberen Grenze wirklich fehlt, ist die ohnehin schon stillschweigend verwendete Archimedische Eigenschaft von $\mathbb{R}$.

Danach benutzt man dieselbe Beweistechnik wie beim Bolzano-Weierstraß: a sei keine obere Schranke, b sei obere Schranke; betrachte $\frac{1}{2}(a+b)$. Entweder ist $\frac{1}{2}(a+b)$ keine obere Schranke, dann setze $a_1 := \frac{1}{2}(a+b)$, $b_1 := b$; oder $\frac{1}{2}(a+b)$ ist obere Schranke, dann setze $a_1 := a$, $b_1 := \frac{1}{2}(a+b)$. Durch Wiederholung entsteht eine Intervallschachtelung,deren Grenzwert die kleinste obere Schranke ist.

Natürlich, der Satz von der oberen Grenze ist über $\mathbb{Q}$ in der Tat falsch. Aber das gilt für den einen Band zurückliegenden Satz von der Intervallschachtelung und den Bolzano-Weierstraß (der ja bewiesen wurde!) auch. Nein, wenn vor diesem Hintergrund jetzt plötzlich (und unter Hinweis auf Quadratwurzeln) von der sehr tief liegenden Vollständigkeit der reellen Zahlen geredet wird, dann ist das völlig verfehlt und eine massive Irreführung von Schülern und Lehrern. Wir können den Vorwurf zu polemischer Formulierungen für diesen Kommentar nicht akzeptieren.
(Zur Information unserer Leser: mit dem Satz von der oberen Grenze wird gleichzeitig die Archimedische Eigenschaft von $\mathbb{R}$ eingeführt:

Denn man kann sie so folgern: Falls $a \in \mathbb{R}$ von keinem $n \in \mathbb{N}$ übertroffen wird, so ist a obere Schranke von $\mathbb{N}$. Nach dem Satz besitzt $\mathbb{N}$ dann eine obere Grenze g, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $n \leq g$; damit ist für alle $n' = n - 1$ auch $n' + 1 \leq g$ d.h. für alle $n' \in \mathbb{N}$ gilt: $n' \leq g - 1$. Widerspruch, denn g sollte kleinste obere Schranke sein.)

Auf II, S.13 finden wir die erste Anwendung des Satzes von Bolzano-Weierstraß (außer einer Fußnote I, S.104) : Es wird richtig bewiesen, daß jede auf einem beschränkten, abgeschlossenen Intervall stetige Funktion nach oben und unten beschränkt ist.

Auf der nächsten Seite wird der Satz vom Maximum stetiger Funktionen auf den unbewiesenen Satz von der oberen Grenze zurückgeführt. Wir kritisieren hier nicht, daß ein unbewiesener Satz benutzt wird, wir kritisieren die unerklärliche Auswahl der Beweise, die gebracht werden und der Lücken, die gelassen werden. Z. B. wird die für die Schule wichtigste Anwendung des Maximumsatzes, der Mittelwertsatz der Differentialrechnung, wieder nicht bewiesen, obwohl sein Fehlen bereits für die wichtigste Lücke im ersten Band (I, S.85: $f' \geq 0 \Rightarrow$ Monotonie von f) verantwortlich ist, und obwohl die Integralrechnung bei Griesel auf nichts so entscheidend ruht wie auf dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung. Gewiß, der Maximumsatz wird auch in einem wichtigen Differenzierbarkeitssatz benutzt (II,S.36, s.u.), tatsächlich jedoch benutzt Griesel die Existenz des Maximums gar nicht, der Satz von der oberen Grenze genügte an dieser Stelle. Aber das ganze Konzept seiner Integralrechnung (nämlich von Stammfunktionen auszugehen) hängt ohne den Mittelwertsatz der Differentialrechnung in der Luft, unnötiger Weise:

> Beweis des "Mittelwertsatzes" $f(b) - f(a) = f'(\xi)\cdot(b - a)$ mit $\xi \in (a,b)$: Nach Abziehen einer linearen Funktion kann man $f(a) = f(b)$ annehmen und muß nun eine Nullstelle von f' in (a,b) finden. Entweder ist f konstant, dann ist das trivial; oder Maximum und Minimum (Existenz gesichert!) von f können nicht beide $= f(a)$ sein. An einem inneren Maximum (Minimum) ist notwendig $f' = 0$, I, S.85 .

Wir überschlagen die Integralrechnung zunächst.

Dann, nach der Definition $\ln x = \int_1^x \frac{1}{y}\,dy$ und der Formel $\ln a^n = n\cdot\ln a$ lesen wir auf II, S.48 : " Die Logarithmusfunktion nimmt jede reelle Zahl als Wert an." Eineinhalb Bände nach dem Satz von der Intervallschachtelung und dem Beweis des Bolzano-Weierstraß, wird hierfür ein "Beweis" angeboten, in dem statt der notwendigen Anwendung des nicht erwähnten Zwischenwertsatzes auf eine Zeichnung (!) verwiesen wird. Diese Lücke wird in einer Fußnote erwähnt, der Beweis wird erst auf der fünftletzten Seite gebracht. Ein sogenannter Stetikeitsbeweis der Sinusfunktion ist schon auf I, S.58 gedruckt, aber noch Mitte des zweiten Bandes werden vor dem Logarithmus, dem einfachsten denkbaren Anwendungsbeispiel der Theorie, zugunsten einer Zeichnung die Waffen gestreckt.
-- Im Schwannwerk wird der Logarithmus nicht behandelt. Beim Sinus wird wie bei Griesel ohne Kommentar (!) das Wort "Bogenmaß" benutzt und dann ein "Stetigkeitsbeweis" geführt. --

Schließlich wird am Ende (II, S.78) der oft benutzte Satz von der oberen Grenze bewiesen. Aber obwohl die Archimedische Eigenschaft genau eine Seite vorher eingeführt wurde (zum Konvergenzbeweis von $\{\frac{a}{n}\}$!) wird noch genau wie beim Beweis des Bolzano-Weierstraß stillschweigend angenommen, $n \to (b-a)\cdot 2^{-n}$ sei Nullfolge.

Vermutlich hat mancher Leser an dieser Stelle vor lauter Einzelheiten vergessen, warum wir diese Kritik schreiben; eine vorläufige Fassung hat sogar in einigen Fällen den Eindruck hervorgerufen, wir beanstandeten, daß ein Lehrer sich auf die Anschauung zurückzieht, wenn er den Beweis eines Satzes seinen Schülern nicht zumuten möchte. (Wir erwarten jedoch eine gewisse Konsequenz bei diesen didaktischen Entscheidungen.)
Daher wiederholen wir:
In den Empfehlungen wird für das Grund- und das Leistungsfach vorgeschlagen, die Analysis von den Vollständigkeits- und Stetigkeitssätzen her aufzubauen; die angegebenen Zeitrahmen zeigen, daß diese Vorschläge bitter ernst gemeint sind. Das in den Empfehlungen zitierte Buch von Griesel hat zwar etwas andere Intentionen, aber: Griesel beginnt mit dem Vollständigkeitsaxiom, beweist als ersten Satz über Folgen den Bolzano-Weierstraß, bringt alle schwierigen Sätze im laufenden Text mit Ausnahme des Zwischenwertsatzes und des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung (diese beiden stehen in der Zusammenfassung am Schluß von Band II). Er beweist einige dieser Sätze, zitiert andere und ersetzt die ausgelassenen durch Zeichnung oder Anschauung. Die unterrichtenden Lehrer haben seine Behandlung offenbar nicht in nennenswertem Umfang kritisiert - die vierte Auflage ist in diesen Punkten unverändert.
Aus diesen Gründen kann man aus unserer Analyse des Griesel eine Vorstellung davon bekommen, was der Schule bevorsteht, wenn die Empfehlungen verbindlich werden sollten.

Einführung des Integrals über Stammfunktionen

und Unterintegrale ohne gleichmäßige Stetigkeit - nach Griesel

(Mit dem Schwannwerk kann nicht verglichen werden, da dort die schwierigen Punkte bewußt verschoben werden.)

Diskussionen haben gezeigt, daß viele Lehrer über diese "Einführung ohne gleichmäßige Stetigkeit" besonders begeistert sind. Das liegt daran, daß bei diesem Aufbau die entscheidenden Schwierigkeiten an anderen Stellen liegen als sonst und dem Lehrer als schwierig bekannte Sätze plötzlich ganz einfache Beweise haben.

Unter der Überschrift " Ein Satz über Stammfunktionen " (II, S.16) wird der wichtigste Satz über Stammfunktionen formuliert:

Die Differenz von zwei Stammfunktionen von f ist eine Konstante.

Der "Beweis" ist eine klassische Bestätigung unserer These zur Analysis. Der Beweis ist falsch. Auf die Lücke wird in einer Anmerkung hingewiesen: " Wenn die Ableitung einer Funktion null ist, so ist diese Funktion konstant. Dieser Satz ist bisher noch nicht bewiesen worden. Er ist jedoch anschaulich ohne weiteres einleuchtend." Bitte machen Sie sich klar: dies ist ein Satz, bei dem aus Eigenschaften der Ableitung auf Eigenschaften der Funktion geschlossen wird. Kein einziger Satz dieses Typs ist bisher bewiesen worden!! Später wird die Integrierbarkeit der stetigen Funktionen daraus hergeleitet - so viel leistet er! Und doch - er ist "anschaulich klar". -- Dabei stehen alle benötigten "tiefliegenden Eigenschaften von R" (Maximumsatz) an dieser Stelle schon bereit.

Auf II, S.30 folgt die Definition des Unterintegrals mit Hilfe des unbewiesenen Satzes von der oberen Grenze.

Auf II, S.36 wird die Differenzierbarkeit des Unterintegrals einer stetigen Funktion (und daß die Ableitung den Integranden ergibt) auf den unvollständig bewiesenen Satz vom Maximum und Minimum stetiger Funktionen zurückgeführt.

Wir betonen die Stellen im Aufbau, wo unbewiesene Sätze benutzt werden, besonders, damit der Leser sieht, was er sich durch den Verzicht auf gleichmäßige Stetigkeit einhandelt. Uns ist kein Stetigkeitsbeweis für eine auf der Schule besprochene Funktion bekannt, der nicht die gleichmäßige Stetigkeit mitliefert. Außerdem folgt die Gleichmäßige Stetigkeit aus dem Satz von Bolzano-Weierstraß ebenso wie die Beschränktheit der stetigen Funktionen auf II, S.13 : Sollte sich zu einem $\varepsilon > 0$ kein $\delta > 0$ mehr finden lassen, so gibt es eben zwei Folgen $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ mit $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ und $|f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon$ (statt einer Folge mit $|f(x_n)| > n$ im Beschränktheitsbeweis II, S.13 ; hier wird in beiden Beweisen das Archimedes Axiom benutzt).

Nach Bolzano-Weierstraß haben die x_n einen Häufungspunkt x, der natürlich auch Häufungspunkt der y_n ist. Die Stetigkeit von f bei x widerspricht dann $|f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon$. - Hat man die Stetigkeit mit Folgen definiert, so bedeutet gleichmäßig stetig übrigens: Für jede Nullfolge $\{a_n\}$ und jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n(\varepsilon)$, so daß für alle $n \geqslant n(\varepsilon)$ und alle $x, x+a_n \in [a,b]$ gilt $|f(x+a_n) - f(x)| < \varepsilon$.

Schließlich folgt auf II, S.37 :

" Stetige Funktionen sind integrierbar. "

Der Beweis sieht faszinierend harmlos aus, weil er auf den drei eben aufgezählten Lückensätzen beruht. Dabei ist die heimliche Benutzung des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung (hier: $f' = 0 \Rightarrow f = \text{const.}$) besonders gravierend.

Aber das ist noch nicht alles (II, S.39): " Für die Berechnung des Riemann - Integrals ist es vorteilhaft, gewisse Regeln zu verwenden, die wir jetzt beweisen. Wir setzen hier die S t e t i g k e i t (von uns gesperrt) der Funktion voraus.

Die Faktorenregel : $\int c \cdot f = c \cdot \int f$.

Beweis : Ist g eine Stammfunktion von f, so gilt ...." (Zitat Ende)

Von Riemann-Integralen, von großer Allgemeinheit also, ist die Rede, aber die wichtigste elementare Eigenschaft des Integrals, die Linearität, wird unter viel eingeschränkteren Voraussetzungen bewiesen, und das auch noch mit Hilfe eines nur "anschaulich einleuchtenden Satzes", des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung. Unabhängig davon, wie man die Integralrechnung aufbaut (ob von Stammfunktionen her oder vom Flächeninhalt), die Linearität des Integrals sollte ohne Benutzung der Differentialrechnung bewiesen werden. (Das gilt auch für das Schwannwerk.) Dann kann man nämlich die wichtigste Ungleichung für Integrale:

$$m \leqslant f \leqslant M \text{ und } a \leqslant x \quad \Rightarrow \quad m \cdot (x-a) \leqslant \int_a^x f(t)\, dt \leqslant M \cdot (x-a)$$

bei stetigem f als abgeschwächten Mittelwertsatz für F: $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ (wegen $F' = f$) interpretieren!

(Vorsicht, man kann damit nicht beweisen: "jede Stammfunktion von f unterscheidet sich von F um eine Konstante", weil man diesen Mittelwertsatz nur für F und nicht für "andere" Stammfunktionen bewiesen hat.)

Nach dieser Analyse eines den Empfehlungen zugrunde liegenden und allgemein anerkannten Buches kann man ja wohl nur noch mit zynischen Argumenten den Standpunkt vertreten, die Vorschläge der Empfehlungen seien für die Schule geeignet.

Wir erlauben uns schließlich, darauf hinzuweisen, daß Griesel ausgezeichnet ohne den vorgeschlagenen Eingangskurs zurecht kommt. Die kritisierten Mängel würden durch den Eingangskurs natürlich nicht behoben.

Wir haben bisher nur den Aufbau der Theorie kritisiert. Dabei ist vielleicht schon deutlich geworden, daß mit der ganzen Theorie währenddessen viel zu wenig gemacht wird. Es gehört auch zu einer guten mathematischen Ausbildung, daß man lernt, angemessene Mittel einzusetzen. Davon kann in den vorgeschlagenen Kursen keine Rede sein. Wir haben gesagt bekommen, das Kurssytem sei bereits eine heilige Kuh, mit der man werde leben müssen. (Wir kennen nicht alle Argumente zugunsten des Kurssytems. Didaktische Argumente für das Kurssystem haben im Fall der Mathematik keinerlei Überzeugungskraft. Die sozialen Begründungen sind nur noch lächerlich, wenn man weiß, daß es Grundschulen gibt (mindestens eine, in der Nähe eines der Verfasser), in denen bereits in der ersten Klasse die Kinder in Leistungsgruppen eingeteilt werden.) Aber kein Mathematiker, der an Empfehlungen für solche Kurse mitarbeitet, darf vergessen, daß die Mathematik gerade nicht aus lauter selbständig lehrbaren Einheiten besteht. Mathematik lernen heißt geradezu: Verstehen, daß dieselben Ideen an vielen Stellen eine Rolle spielen, und daß Ideen, die keine Rolle spielen, nichts taugen. Von dem Zeitverschleiß, der betrieben wird, weil Themen wie Sphärik oder Nichteuklidische Geometrie etwa ohne Kenntnis euklidischer Bewegungen des R^3 behandelt werden, wollen wir hier gar nicht reden. Wir müssen jedoch noch einige Worte über die anderen Kurse sagen, in denen Analysis vorkommt.

Der "Aufbau des Zahlensystems" (Leistungskurs II.5) soll wohl in der Neuauflage der "Empfehlungen" fehlen. Gut. Der Kurs "Numerische und graphische Methoden" bringt eine Reihe von Themen, die unter allen Umständen in die Analysiskurse gehören (Wir haben weiter oben Stoffeinsparungen beschrieben, die das auch ermöglichen.): Z.B. 1.2 Darstellung einfacher Kurven und Flächen im R^3, 5.2 Interpolation (aber nicht alle denkbaren Verfahren!!) und im Zusammenhang damit: Numerische Integration, nämlich hauptsächlich: Integration interpolierter Funktionen. 2.4 Newtonsches Verfahren zur Illustration der unglaublichen Leistungsfähigkeit linearer Approximationen. (Daß das Gaußsche Verfahren zum Lösen von linearen Gleichungssytemen hier vorkommt, charakterisiert nur die Kurse über lineare Algebra.) Wenn man die interessanten Teile dieses Kurses in die Analysis integriert, dann kann man es auch vermeiden, Schüler in ihrem dritten Leistungskurs mit Funktionspapieren und Nomographie zu langweilen, weil ein Kurs ein halbes Jahr lang sein muß.- Die Versuchsauswertung im weitesten Sinne kommt mit dem Kurs Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie so schlecht weg (fragen Sie mal Herrn Engel!), daß die kleinsten Quadrate auch nicht mehr viel rausreißen.

Der Leistungskurs "Informatik" wird angekündigt mit: "Der Schüler

lernt erstmals an Stelle der bisher formal-abstrakten Seite der Mathematik, die dynamisch-konkrete kennen." - Vielen Dank !! Aber woran liegt das wohl ?? Den algorithmischen Teil und den Programmierteil des Kurses werden Lehrer an Schulen mit Computeranschluß ohnehin benutzen, um die Analysis lebendiger zu machen. - Den Rest, vor allem Punkt 15 bis Punkt 22, empfehlen wir, im Kollegium laut vorzulesen und ein Tonband mit der Reaktion an das Kultusministerium zu schicken.

Der Grundkurs "Komplexe Zahlen" zeigt, wie schnell man zur Sache kommen kann, wenn man den Eingangskurs nicht gehört hat. Aber: " 5.3:Auf eine analytische Behandlung der stereographischen Projektion wird verzichtet." (Weil $1 + r^2$ im Nenner auftritt ?)

Und: " 9:Dagegen erscheint ein Lehrervortrag mit vorbereiteten Folien über die konforme Abbildung von Feldlinien, Äquipotentiallinien, Strömungsbildern von komplizierteren auf einfachere geometrische Verhältnisse und Hinweis auf die Invarianz der Laplaceschen Gleichung möglich." Uns fehlen die Worte.

Den Kurs " Wirtschaftsmathematik" schlagen wir vor, in die Aufgabensammlung zur Bruchrechnung und zur Analysis aufzunehmen.

Die Grundkurse Analysis B I, B II sind zu vage, um sie zu kommentieren.

Wir fordern:

Die Kursvorschläge für die Sekundarstufe II müssen mit viel mehr Zeit- und Arbeitsaufwand und mit viel mehr sorgfältiger Detailarbeit vorbereitet werden.

Details: GEOMETRIE

"Eine Wissenschaft kann ihr Sachgebiet immer nur bis auf eine isomorphe Abbildung festlegen. Insbesondere verhält sie sich gegenüber dem 'Wesen' ihrer Objekte ganz indifferent. Das, was die wirklichen Raumpunkte von Zahlentripeln oder anderen Interpretationen der Geometrie unterscheidet, kann man nur k e n n e n in unmittelbarer lebendiger Anschauung. Aber das Schauen ist nicht selige Ruhe in sich, aus der es niemals herauszutreten vermöchte, sondern drängt fort zum Zwiespalt und Wagnis der E r k e n n t n i s ; Schwärmerei aber ist es, von der Erkenntnis zu erwarten, daß sie ein tieferes Wesen als das der Anschauung offen daliegende - der Anschauung enthülle."

H. Weyl

"Geometry is endangered by dogmatic ideas on mathematical rigor. They express themselves in two different ways: absorbing geometry in a system of mathematics as linear algebra, or strangulating it by rigid axiomatics. So it is not one devil menacing geometry. There are two. The escape that is left, is the deep sea. It is a safe escape if you have learned swimming. In fact, that is the way geometry should be taught, just like swimming."

H. Freudenthal

"Ein Modell - mag es nun ausgeführt und angeschaut oder nur lebhaft vorgestellt sein - ist für die Geometrie nicht ein Mittel zum Zwecke sondern die Sache selbst."

F. Klein

T E I L I : Kritik des Geometriekonzepts der Empfehlungen

Eine ganze Reihe von Kursen in den Empfehlungen befassen sich mit geometrischen Themen:

II.4 Lineare Algebra und Analytische Geometrie,
II.6 Synthetische Abbildungsgeometrie,
II.7 Analytische Abbildungsgeometrie,
(II.9 Algebraische Strukturen),
II.12 Grundlagen der Mathematik,
III.2 Lineares Optimieren,
III.3 Sphärik,
(III.4 Komplexe Zahlen),
III.6 Nichteuklidische Geometrie,
IV.6 Vektorielle lineare analytische Geometrie und lin.Alg.,
(IV.9 Gruppentheorie),
IV.10 Endliche Geometrien.

(Die geklammerten Kurse greifen nur zum Teil auf Geometrisches zurück, sie werden im folgenden stets in Klammern zitiert. Kurs IV.10 soll in der Neuauflage der Empfehlungen nur noch unspezifiziert neben den Themen "geometrische Topologie" und "Darstellende Geometrie" als Vorschlag erscheinen, wir werden ihn also im folgenden nicht berücksichtigen.)

In der Zahl der Kurse zur Geometrie scheint nun überaus viel Geometrie empfohlen zu werden. Allerdings ist nicht ein einziger Geometriekurs bislang obligatorisch. Dazu kommt, daß einige dieser Kurse in praxi entfallen werden, weil weder ausreichend viele Lehrer noch Schüler zur Verfügung stehen dürften, um das volle Angebot aufrecht erhalten zu können. Wir sind der Ansicht, daß wenigstens ein Geometriekurs zur Pflicht gemacht werden sollte - allerdings keiner von den angebotenen. Dies wollen wir im folgenden erläutern. Zunächst einige Tabellen:

TAB.1: Stoffübersicht zu den 8(3) Geometriekursen

Stoffgebiet	Wochen insges.	Kurse insges.
Grundlagenfragen, Definitorisches, Axiomatik, Strukturelles (incl. Motivation)	ca. 74(37)	7 (3)
Geometrischer Kalkül (Gerad.- u. Eb.- Glchgn)	ca. 50(6)	7 (2)
Geometr. Figuren (incl. Beschreibung; ohne Nichteuklidisches)	ca. 16(1) *	4 (1)
Beziehungen zu anderen Gebieten	ca. 8(5)	5 (1)
Sonstiges	ca. (2) *	(1)
Gesamt Geometrisches	ca. 148(51)	8 (3)

* zusätzl. zeitl. undefinierter Vorschlag

TAB.2: Inhalt der Kurse, ohne solches an Axiomen, Definitionen bzw. Strukturen, das nach Einführung nicht angewandt wird

Kurs	Thema
II.4/IV.6	Char.Basis Vektorr., Lin.Gl'syst.(n=3), Geraden-,Ebenengl.,Strahlensätze, Schwerpunktsätze, Cauchy-Schwarz-,Dreiecksungl., Pythagoras, Sin-,Cos-Satz, Thales, Trigon.Additionstheoreme.
II.6	Aufg.z.Ge-radenspiegelung,Drehung, Streckung,etc., Transl.als Produkt von Spiegelungen, Reduktionssätze,Invarianz des DV (alles ohne Rechnungen in der Ebene).
II.7	Def.Kreis,Kugel,Tangente,Pole,Polare, Produkt v.Determinanten (n=2),Rang-Determinante(n=2), Flächenmaß unter Affinität, affine Invar.(Geraden,Parall.,TV), Bestimmtheit durch drei Pte.,Reduktion v.Ähnlichkeiten(n=2),Fixmengen,Reduktion von Kongruenzen,(Kegelschnitte).(Gesamtdauer: ca.26 Wochen!)
II.9/IV.9	Satz v.Lagrange,Homomorphiesatz f.Gruppen,Gruppensystematik bis Ord.1o, Wurzeladjunktion,Ringerweiterung.
II.12/III.6	Trugschlüsse,Dualität proj.Inzidenzaxiome,Reduktion hyperbol.Abbildungen, hyperbol. und ellipt.Grundkonstr.
III.2	Durchschnitt konvexer Mengen, lin.Opt.(n=2),graphische Verf., Hauptsatz der lin.Opt.,Eckpte.,Simplexverf.,duale Aufg.,Max-Prinzip, Algorithmus-Aufbereitung.
III.3	Winkelsumme,Berechnungen,Sin-,Cos-Satz am ebenen und sphär.Dreieck, Aufg. aus Erd- und Himmelskunde.
III.4	Körpererw.,trigon.Darst.kompl.Z., stereogr.Proj.,lin.und rat.Funkt., Ausblick auf Konformes.

TAB.3: Erklärte Lernziele (laut "Zielsetzungen" und "Erläuterungen") und dazu geplanter Zeitrahmen (geschätzt)

Lernziel	kommt vor in Kurs	dafür Zeit
Methoden der lin.Alg.(incl.Kalkül)	II.4, IV.6	8,10
Axiomatik (der Geom.,formales Schließen, Systematik,Strukturen)	II.4, II.6, II.9, III.3, III.4, IV.9	4,2 16,3 6,16
Raumanschauung	II.4, III.3, IV.6	1,4 3
Geometrie (der Mittelstufe,der Ebene)	II.4, II.7, III.3,III.4, IV.6	3,5 4,6 3
Klassifikation v.Abbildungen (incl.Anw.Gruppen)	II.6, II.7	14,17
Wissenschaftstheoret.u.Grundlagenaspekte	II,12, III.6, IV.10	16,16 16
Anwendungsbez.Methoden	III.2, III.3, III.4	16,5 2

Wir bitten darum, die Bedeutung dieser Tabellen für unsere folgenden Ausführungen nicht zu überschätzen. Sie geben jedoch einen ersten Eindruck davon, wie in den Geometriekursen Struktur und Axiomatik überbetont sind. Man sieht insbesondere, daß die Anzahl der Definitionen (und die dafür aufgewendete Zeit) in keinem sinnvollen Verhältnis zur Anzahl der besprochenen Sätze steht. - Wir bitten, bei den nun folgenden Ausführungen stets mit den Stoffplänen der Empfehlungen zu vergleichen.
Wir behaupten von den Empfehlungen:

1. Es wird dort gelehrt: Geometrie wird grundsätzlich nur aus philosophischem oder strukturellem Interesse betrieben. Geometrie erscheint als die Lehre vom Aufsuchen von Axiomen, Definitionen, Abbildungsgruppen.

Wie aus der Tabelle 1 ersichtlich, werden Axiomen,Strukturen und Grundlagen mehr als die Hälfte der verfügbaren Wochen gewidmet; allein für nichteuklidische Geometrien stehen 25 Wochen, für gruppentheoretische Aspekte geradliniger Abbildungen mindestens 25 (10) Wochen im Programm. Dazu kommt natürlich im Kurs über Strukturen viel Zeit im Zusammenhang mit Beispielen. Die strukturtheoretische Schlagseite finden Sie in allen Kursen zur Geometrie, bis auf III.2,III.3. Offenbar hat sich Kleins Erlanger Programm damit an einer Stelle durchgesetzt, die ihn zutiefst erschrecken müßte: Kleins Programm wird nämlich grundfalsch aufgefaßt! Was er -u.viele andere Mathematiker von 1870 bis 1930 - damit anstrebte, war eine *Klassifikation* und *begriffliche Präzisierung des riesigen Geometriewissens jener Zeit*. Weder der begrenzten Reichweite noch der kreativen Impotenz des Erlanger Programms wird auch nur ein Wort gewidmet, obwohl Klein selbst schon im Erlanger Programm darauf hinwies:

Note III aus "Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen von Dr.Felix Klein,o.ö.Professor der Mathematik an der Universität Erlangen. Programm zum Eintritt in die philosophische Facultät..."(Erlangen, Oct.,1872): "Über den Werth räumlicher Anschauung.

Wenn wir im Texte die räumliche Anschauung als etwas Beiläufiges bezeichnen, so ist dies mit Bezug auf den rein mathematischen Inhalt der zu formulierenden Betrachtungen gemeint. Die Anschauung hat für ihn nur den Werth der Veranschaulichung, der allerdings in pädagogischer Beziehung sehr hoch anzuschlagen ist. Ein geomatrisches Modell z.B. "ist auf diesem Standpuncte sehr lehrreich und interessant.

Ganz anders stellt sich aber die Frage nach dem Werthe der räumlichen Anschauung überhaupt. Ich stelle denselben als etwas selbständiges hin. Es gibt eine eigentliche Geometrie, die nicht, wie die im Texte besprochenen Untersuchungen, nur eine veranschaulichte Form abstracterer Untersuchungen sein will. In ihr gilt es, die räumlichen Figuren nach ihrer vollen gestaltlichen Wirklichkeit aufzufassen und (was die mathematische Seite ist) die für sie geltenden Beziehungen als evidente Folgen der Grundsätze räumlicher Anschauung zu verstehen. Ein Modell - mag es nun ausgeführt und angeschaut oder nur lebhaft vorgestellt sein - ist für die Geometrie nicht ein Mittel zum Zwecke sondern die Sache selbst."

Wie Klein sich Geometrie-Unterricht vorstellte, können Sie z.B. im Band II seiner "Elementarmathematik" sehen:

Dort spricht er z.B. über affine Transformationen. Und da wird erst einmal erzählt, woher das Wort "affin" kommt, wo solche Transformationen vorkommen, was sie mit Raumgebilden tun, was sie mit Richtungen machen, wie einfache Affinitäten zustande kommen und mechanisch simuliert werden können, wie sie zu neuen Sätzen führen, wie sie in Physik oder Darstellender Geometrie hilfreich sind, etc. Dann erst kommt Klein sehr behutsam zum Satz von Pohlke und zur Analyse der Affinitäten. Endlich werden auf den nächsten 50 Seiten in demselben Stil weitere Transformationen vorgestellt,und schließlich finden Sie die Gedanken des Erlanger Programms am Ende des Buches als ordnendes Prinzip.

Also: Viel Anwendung und Anschauung, wenig Struktur und Klassifikation! Dies kann man nur betrauern, wenn man die Kurse II.4 und II.7 anschaut. Man wende nun nicht ein, wir seien heute viel weiter, Klein habe mit einem Bein im vorigen Jahrhundert gestanden. Es gibt in den Geometriekursen nicht einen Satz, den Klein nicht schon gekannt hätte, und es gibt dort nicht einen Gedanken, mit dem sich Klein nicht irgendwann auseinandergesetzt hätte. Und Klein kannte und liebte die Schule!

Klein oder nicht Klein, halten wir jedenfalls fest: Schöpferisch tätig sein heißt in den Geometriekursen offenbar Definitionen erarbeiten und die Mittelstufengeometrie durch die axiomatische Brille betrachten. Motivation bedeutet in aller Regel Extrahieren struktureller Gesichtspunkte aus einem Beispiel (e.g.:II.4.1) oder Nachprüfen der Definitionen, die vom Lehrerhimmel kommen, weil die Zeit niemals reicht.

e.g.: II.4.6 - Der euklidische Vektorraum - 2 Wochen - Erläuterungen: "Zur Motivation geeigneter Axiome für das Skalarprodukt kann man zum Beispiel vom physikalischen Arbeitsbegriff ausgehen. Der Abstraktionsprozeß von einem solchen Einstieg zur axiomatischen Fassung des Skalarproduktes sollte bewußt gemacht werden." -- Die Betonung bei den letzten drei Wörtern ist leider nicht angegeben.

Zur viel zu großen Betonung nichteuklidischer Geometrien nur soviel: Der Schüler kann sich aus Mangel an - für ihn erreichbaren - Anwendungen von ihrer Bedeutung nicht überzeugen, er wird also nur Unverdaut-Erkenntnistheoretisch-Historisches mitnehmen.

Dazu Erläuterungen zu II.12.6: "Die Klassenarbeit kann auch aus einer angemessenen sprachlichen Zusammenfassung bestehen." -- Wie sieht diese Zusammenfassung wohl fünf Jahre später aus,und ersparte man dem Schüler nicht viel, wenn man ihm statt des Kurses II.12 überhaupt nur eine solche hektographierte Zusammenfassung anböte?

Wir behaupten von den Empfehlungen:

2. Es wird dort gelehrt, Geometrie fände meist in der Ebene statt.

In den zentralen Kursen IV.6, II.4, II.7 kommen bestenfalls viele Geraden- bzw. Ebenendarstellungen und eine Kugel vor:

Erl.IV.6,7.3: "Ebene-Gerade wird verzichtet; dagegen sollte die vollständige Diskussion der Lage von Geraden im Raum sowohl die Systematik der Fallunterscheidung wie die Raumanschauung schulen." Dabei bleibt es in diesem Kurs, trotz des erklärten Zieles "...die Raumanschauung ...zu üben".

Erl.II.4: "Zur Schulung des Anschauungsvermögens sollte der Behandlung der dreidimensionalen Geometrie besonderes Gewicht zukommen. Im Hinblick auf die

begrenzte zur Verfügung stehende Zeit, sollte man sich bei der Durchführung häufig auf den zweidimensionalen Fall beschränken...An manchen Stellen erscheint ein Ausblick auf höhere Dimensionen angebracht; so können viele Definitionen entsprechend formuliert werden (vergl.z.B.22: lin.Abhängigkeit und Unabh.)."

Erl.II.7: "...Die strengen Überlegungen sollten sich auf den Kreis konzentrieren."

"....Ebensowenig ist die Beschränkung auf Abbildungen des zweidimensionalen Raumes zwingend." (Beim Stoffplan wurde aber offensichtlich davon ausgegangen!)

Auch in anderen Kursen findet man gelegentlich (je) eine Kugel, nämlich in II.12 bzw. III.6 als pathologisches Beispiel und in III.3 (Sphärik) erstmals und letztmals als Milieu zähflüssigster geometrischer Untersuchungen, deren größter Erfolg wohl in ihrer Ausdehnung auf ein ganzes Semester zu sehen ist (sieht man einmal von dem enormen Gewinn ab, den schiffbrüchige Kursabsolventen gegebenenfalls ziehen werden!).

Schließlich kommt auch der R^n in drei Kursen vor, nämlich in II.4,III.2 (im Sauseschritt) und IV.6.

Erl.IV.6: "...Anschließend beschränkt sich der Kurs wegen engen Zeitrahmens überwiegend auf 2-3 Dimensionen. Der Behandlung der linearen Abhängigkeit wird breite Zeit eingeräumt. Dabei wird eine symmetrische Definition bevorzugt. Anwendungen auf die Berechnung von Teilverhältnissen ergeben Übungs- und Prüfungsstoff für die 1.Arbeit." --- "Nach dieser Zäsur werden Vektoren im affinen und kartesischen Koordinatensystem behandelt, so daß der Vektor als n-Tupel ($n \geq 3$) von reellen Zahlen ein neues Modell für die Struktur des Vektorraumes darstellt."

Natürlich wird hier die formale Seite der Geschichte betont (das "neue Modell" für die alte "Struktur"), nicht die Nutzanwendung. Dafür und natürlich auch für die Verallgemeinerungsfähigkeit formaler Definitionen (wie lin.Abhängigkeit) wird jeder aufgeschlossene Schüler dankbar sein.

Der Rückzug auf die Ebene hat gerade in Struktur- und Grundlagenfragen eine große und ehrwürdige Tradition (Bachmann, Hilbert,...). Wir verraten aber kein Geheimnis, wenn wir auf die dreidimensionale Anschauungswelt verweisen und meinen, daß der Rückzug auf die Ebene die Anwendungsmöglichkeiten der Geometrie in Physik und Analysis stark reduziert. Dieser uralte und langgeschmähte Zopf gehört endlich abgeschnitten, er darf nicht auch noch die "neugestaltete Oberstufe" erleben.

Und noch ein Zopf gehört abgeschnitten:

3. Es wird nämlich gelehrt: Geometrische Objekte sind geradlinig und unbegrenzt. Kugeln sind nur philosophisch oder astronomisch interessante Entartungen. Krümmeres kommt in der Geometrie nicht vor.

Wie schon gesagt, Kugeln kommen nirgends vor, außer in den mißratenen Kursen III.3 und (je einmal) II.12, III.6. Dies aber ist das Krümmste (abgesehen von ebenen Kegelschnitten in einem Kurs, nach der 20. Woche!) was in die "neugestaltete Oberstufe" eindringt. In hunderten von Jahren hat sich die Geometrie vorwiegend mit krummen Objekten befaßt, nur solche kommen in der Natur - genaugenommen - vor, im Unterricht bleiben sie Tabu.

Ebenso geht es der Konvexität, dem neben Linearität wohl wichtigsten geometrischen

Begriff (vergl. den Vortrag von D.Laugwitz auf der MNU-Tagung 1973). Konvexe Mengen kommen - in sehr spezieller Situation - nur im Kurs über Lin.Opt. vor.

4. Es wird leider auch gelehrt: Geometrie hat nichts zu tun mit Analysis, Rechnen, Physik, Anwendungen,...

Natürlich wäre man mit einer einzigen krummen Kurve mitten in der Analysis und Physik. Aber das Kurssystem soll ja "enttypisieren", und so enttypisiert man die Geometrie gleich ganz. Die Analysis wird überhaupt nur einmal, an recht unerwarteter Stelle (Maximalprinzip, Kurs Lin.Opt.), genannt. Die Physik kommt immerhin viermal vor: Bei der Motivation des Skalarproduktes aus dem physikal. Arbeitsbegriff (II.4,IV.6), bei einer Entscheidung des Fachlehrers im Philosophiekurs II.12 und schließlich in einem Selbstgespräch des Lehrers über Konformes im Kurs III.4. Sonst findet man an Bezugsgebieten noch: Erdkunde, Nautik, Astronomie (alle in III.3) und EDV in III.2 *. Über Landkarten wird allerdings nichts verraten.
Was das Rechnen anbetrifft: Hier wirkt das Trauma klassischen Stumpfsinns offenbar nach. Das ist verständlich aber bedenklich: Mathematische Theorien ohne Kalküle sind (vielleicht) schön aber nutzlos, Anwendungen der Mathematik erfordern fast immer Sicherheit im technischen Kalkül, um das Ziel nicht aus den Augen zu verlieren (auch innerhalb der Mathematik: Was kann ein Lehrer auf der Oberstufe erreichen, wenn der Mittelstufenstoff nicht beherrscht wird?).
Die in den Natur- und Wirtschaftswissenschaften so nützlichen Matrizen sollten wenigstens angeboten werden (n=2 ist dabei nicht ernst zu nehmen).Eigenwerte klingen in ein paar Erläuterungen zaghaft an (als Klassifikationshilfen?!). Ungleichungen kommen wenig, Erzeugungsprinzipien für Abbildungen, Raumkurven und krumme Objekte nirgends vor.
G e r a d e d e r M a n g e l a n A n w e n d u n g s m ö g l i c h k e i t e n h a t u n s e r e s E r a c h t e n s b e d e n k l i c h e K o n s e q u e n z e n : Der Schüler darf ruhig alles vergessen, sieht er doch keinen Nutzen außerhalb der ungeliebten Mathematik; aber er soll, bitteschön, an die Mutter der Wissenschaften (Ma - Thematik) hinter den Eisbergen glauben!

K l e i n h a t s e i n E r l a n g e r P r o g r a m m n i e m a l s a l s S t r i c k f ü r d i e G e o m e t r i e g e d a c h t !
(Vgl. dazu auch den folgenden Teil II.)

* Leider vergaßen wir hier die Photogrammetrie (II.6.7.4).

5. Nach den Empfehlungen ausgebildete Schüler werden nach der Schulzeit über folgendes Geometriewissen verfügen: Eine mystische Formel namens $a^2+b^2=c^2$ und tiefstgreifende Erkenntnisse über die Natur des Parallelenaxioms, insbesondere durch Gauß' berühmte Messung vervollkommnet.

Was bieten denn die an tiefsinnigen Definitionen so reichen Geometriekurse? Wo sind denn die geometrischen Ergebnisse, um die es sich lohnt diesen Abstraktionsaufwand zu treiben? Was kann denn der Schüler mit sym. Bilin.-form., projektiven Inzidenzaxiomen und Homomorphiesatz a n f a n g e n ? Was bleibt ihm denn, außer "angemessenen sprachlichen Zusammenfassungen", acht verschiedenen (!) Geradendarstellungen und Reduktionstheoremen für allerlei Abbildungen, die er nirgends zu "sehen", "aufzuspüren", anzuwenden gelernt hat? Merken kann man sich in der Mathematik doch auf die Dauer nur das, was a u f k l ä r e n d gewirkt hat, a n g e w a n d t wurde oder Q u e r v e r b i n d u n g e n erzeugte. All diese Aspekte werden aber auf i n n e r m a t h e m a t i s c h e (Grundlagen-) Fragen reduziert. Schließlich lernen die Schüler, daß sie früher, auf der Mittelstufe, mehr und schönere (weil kreative) Geometrie betrieben haben. Welche Chancen werden doch hier vertan!

Wir haben von Praktikern das Argument gehört, dies alles sei nicht zu ändern, weil die Schulbücher älter als das Kurssystem sind, weil man in einem halben Jahr eben nicht über die "Grundlagen" hinauskäme, wenn man Mathematik sorgfältig und "sauber" lehren will. Was sind das für Argumente! Dann müssen eben bessere Bücher her, und dann muß man sich eben auf die Einführung einer a n g e m e s s e n e n Begriffswelt beschränken. Diese Aufgaben m ü s s e n gelöst werden, sonst erwürgt das Kurssystem jeden Sinn dieses Unterrichts.

6. Vier Kurse wären mehr als genug, den Gesamtstoff zu überdecken. Die Details brauchten nur sorgfältiger ausgewählt zu werden.

Schauen wir uns genauer an, was die zentralen Kurse II.4,II.6,II.7 und IV.6 bieten:
Zunächst II.4 (incl.IV.6): Da sollen in 1.1 die Gesetze des Vektorraumes im Modell der Pfeilklassenvektoren "motiviert" werden. N u n b e h i n d e r n d i e s e P f e i l k l a s s e n a u f g a n z o f f e n s i c h t l i c h e W e i s e d i e A n s c h a u u n g*. (Stellen Sie sich nur einmal vor was der Schnitt zweier Pfeilgeraden-Klassen im Anschauungsraum ist, oder stellen Sie sich auch nur die O-Pfeilklasse vor. So einfache Begriffe wie Kollinearität, Komplanarität und Parallelität werden hier zu Ungetümen stilisiert: Wann liegt wohl eine Pfeilklasse in einer Ebene, und wieviele Pfeile liegen dort, und wie beweist man das mit einem Axiomensystem, das garnichts über Pfeile aussagt?) Damit zum "Vektorraum abstrahiert werden kann, glaubt man, die Anschauung beseitigen zu müssen. Dazu werden (Voraussetzung: Eingangskurs!) in einem Atemzug Zahlenfolgen, Polynome, Funktionen, reelle Zahlen genannt, man kann vielleicht noch "auf die

* Pfeilklasse := Graph einer Translation!

Möglichkeit hinweisen, Vektorräume über beliebigen Körpern zu definieren" , bringt Untervektorräume , macht ein paar Anwendungen der Axiome auf einfache Folgerungen - und hat so am Ende der ersten zwei Wochen alles erschlagen, was man Anschauung nennen könnte. So also wird der Boden urbar gemacht für die weiteren Diskussionen, und diese erfolgen dann auch häufig auf diesem "Niveau" (nämlich im einarmigen Handstand auf dem Kirchturmdach).
Da geht es weiter über Kollinearität, Komplanarität zur linearen Abhängigkeit und Linearkombination und es heißt:

"Wesentlich (bei den ersten beiden) ist hier eine algebraische Beschreibung zur Motivation ...(der zweiten beiden). Diese Begriffe (die letzteren) sind für den weiteren Aufbau besonders wesentlich, bereiten den Schülern aber häufig Schwierigkeiten."

Diese Schwierigkeiten werden durch die Pfeilklassen nur vergrößert: Solange man den Unterschied zwischen klassenweiser Struktur und repräsentantenweisem Rechnen nicht klar machen kann, bleibt alles geheimnisvoll. Anscheinend ist aber gerade diese Unterscheidung (Klasse - Repräsentant) für den Schulunterricht zu schwierig. So wird in dem Buch von Köhler u.a. konsequent repräsentantenweise definiert, gerechnet und argumentiert, ohne daß ein einziges Mal ein Wort über die Unabhängigkeit von der Auswahl des Repräsentanten fällt. Die Wohldefinition muß (auch in der subtilen Bezeichnungsweise $\overleftarrow{AB},\overrightarrow{AB}$) "intuitiv klar" sein. Was darf man denn in dieser Situation eigentlich voraussetzen, um zu <u>beweisen</u>, daß die Pfeilklassen einen Vektorraum bilden? Und warum sind ausgerechnet diese Pfeilklassen zur anschaulichen Motivation der "Lin. Unabhängigkeit"(im abstrakten Vektorr.) geeigneter als das, was man schon vorher über die Repräsentanten wußte? - Es ist ein schöner Satz der linearen Algebra, daß ein minimales Erzeugendensystem (eines Vektorraums) auch ein maximal linear unabhängiges System ist und umgekehrt. Dabei ist "linear unabhängig" der technische, formale Begriff (an dem niemand interessiert wäre, wenn es diesen Satz nicht gäbe), während minimale Erzeugendensysteme (z.B. beim Lösen linearer Gleichungssysteme mit dem Gaußalgorithmus) von alleine interressant und auch anschaulicher sind. Man betrachte, welche Mühe es den Empfehlungen (und mit ihnen Köhler u.a.) macht, den Begriff "linear (un-)abhängig" als von zentralem Interesse zu motivieren.

In 4.0 werden nun eine Reihe absolut brotloser Künste vorexerziert. Die Trennung zwischen affinem und linearem Raum kostet (auf dieser Stufe) nach unseren Erfahrungen mehr als sie bringt: Alles kann (mittels des Begriffs der Translation) im Vektorraum gemacht werden, drei schlimme "Axiome" werden überflüssig. Betrachten Sie nun, was nach diesem begrifflichen Aufwand in 5. für "Theoreme" bewiesen werden - wer ärgert sich eigentlich nicht darüber?
Wir wollen das alles schnell vergessen: nun kommt die wunderbare "Einführung des

Skalarprodukts ... als reellwertige, positiv definite, symmetrische, bilineare Funktion". Hier schwingt sich (im allgemeinen Vektorraum!) ein mathematischer Begriff zu ungeheurer Größe auf. Ja, zu solch unergründlicher Bedeutsamkeit, daß in den Empfehlungen - endlich einmal - nahegelegt wird, ihn nur huckepack auf dem physikalischen Arbeitsbegriff hereinreiten zu lassen. Da wir Längen (und manchmal auch - wie bei Hövelmann,Köhler et al. - Winkel) von Anfang an bei unseren Pfeilklassen benutzt haben, werden wir nun in der Hinsicht "bereichert", daß wir Längen und Winkel in beliebigen Vektorräumen mit innerem Produkt "kennen"lernen.

Und was geschieht in diesem Kurs, nachdem nun die Schüler mühsam den Gipfel der Abstraktion erklommen haben? Man betrachtet die Mittelstufen-Geometrie und dort nur das, was mit den Pfeilklassen schon völlig befriedigend zu behandeln ist: Winkel, rechte Winkel, kartesische Koordinaten, Pythagoras, Thales, Sinussatz, Additionstheoreme.... Was aber wirklich an der Mittelstufen-Geometrie fehlte und unbedingt einer genauen Erörterung bedürfte, nämlich die E I N F Ü H R U N G von Sinus und Cosinus, bleibt tabu.

Wie heißt es in der Zielsetzung für diesen Kurs:

"...Er soll den Vektorraum als eine für die Mathematik, aber auch für Naturwissenschaften und Datenverarbeitung wesentliche Struktur vorstellen. Als rein mathematische Anwendung dieser Struktur soll die dreidimensionale euklidische Geometrie axiomatisch begründet werden. Ein solcher deduktiver Aufbau der Geometrie führt in <u>formales</u> Schließen ein..."

Dies ist leider wahr!
Stellen wir klar: Es wird zu viel nutzlos definiert, es ist nicht zu sehen, was der Kalkül bringt. Der axiomatische Aufbau ist langsam und -weilig. Die zentralen Begriffe: Abstrakter Vektorraum, Basis, Determinante, affiner Raum, euklidischer Punkt- versus Vektorraum sind für spätere Nichtmathematiker reine Kunstschöpfungen, die trotz großem Zeitaufwand nicht über längst Bekanntes hinausführen und deren Zweck man nur vom Hörensagen erfahren kann. Man braucht doch nun wirklich keine Oberstufen-Geometrie, um zu erfahren, daß durch zwei Punkte des Anschauungsraumes genau eine Verbindungsgerade gehen sollte(II.4, 5.3). - Dies ist auch nicht der Sinn der axiomatischen Methode!

<u>Zum Kurs II.6</u>: Hierzu nur zwei prinzipielle Einwände:
1. Wenn man die Reinheit der synthetischen Methode ein bißchen aufgäbe, könnte man die angesprochenen Abbildungen auch analytisch beschreiben, könnte zeigen, daß die Theorie Modelle hat, könnte die vielen Abbildungen ohne weiteres auf geometrische Figuren (z.B. Kreise) anwenden (und so z.B. den Matrizenkalkül mit einüben), anstatt nur immerzu Abbildungen zu analysieren und zusammen zu setzen.
2. Leider war gerade die synthetische ebene Geometrie historisch eine Klammer, mit der Geometrie in Deutschland an die Ebene geheftet wurde, diese Funktion bleibt ihr im Kurs - aus technischen Gründen - erhalten.

Zum Kurs II.7:

Dieser "Hochleistungskurs" verdiente eine genauere Diskussion, die wir aus Zeitmangel hier nicht führen wollen. Die wichtigsten Kritikpunkte:

1. Kurs II.4 wird unnötigerweise vorausgesetzt (vgl. Voraussetzungen zu III.2)
2. Die Erweiterung auf "nichtlineare Gebilde" fällt dem Zeitplan zum Opfer.
3. Von 4.0 bis 12.0 wird immerzu klassifiziert, was soll das?
4. Fixpunkte kann man auch außerhalb von Klassifikationsproblemen sinnvoll(er) anwenden.
5. Wieder schlägt die ebene Geometrie zu sehr durch.
6. Die Zeitfrage ist sehr oberflächlich behandelt.

Zu den anderen Kursen:

Die restlichen Geometrie-Kurse zerfallen in zwei Gruppen, nämlich Nichteuklidisches und Anwendungskurse. Nichteuklidisches sollte in dieser Form nicht ohne gründlichere Kenntnis der euklidischen Geometrie betrieben werden, die ganze Sphärik z.B. läßt sich als Korollar zur Bewegungsgruppe behandeln. Man sieht hier, daß das Kurssystem ("unabhängige Halbjahreseinheiten"!) dazu verleitet, Themen mit unzureichenden Mitteln zu behandeln und dafür auf ein halbes Jahr auszuwalzen. Als Test die Frage: Würden Sie ernsthaft erwägen, ein halbes Jahr Sphärik in Ihren normalen Unterricht einzubauen? (Oder III.6? II.12?)

Der Kurs Lineares Optimieren enthält schöne Möglichkeiten, nützliche Mathematik zu lehren. Dem Stoffplan nach hätten wir erwartet, daß ein anderer Geometrie-Kurs vorausgeht; stattdessen begnügt sich der Autor des Kurses mit dem "Abschlußniveau der Mittelstufe"! - weil die anderen Kurse ihm nichts Brauchbares bieten?

Alles in allem, es sollte einen obligatorischen Geometrie-Kurs (evtl. als Eingangskurs) und zwei bis drei darauf aufbauende Wahlkurse geben. Was dort nicht hineinpaßt, kann man verlustlos streichen.

T E I L II — Wie kann man den Unterricht in Geometrie sinnvoller gestalten? - Literaturstimmen

Gemäß unserer Forderung, die Aufgaben und Ziele des Unterrichts vorab zu umreißen, wollen wir einige "Antithesen" an den Beginn stellen (Hegel möge verzeihen!) und kurz erläutern. Natürlich ist Subjektives hier nicht zu vermeiden, wir meinen aber, daß hier eine positive Chance des Kurssystems liegt: Der Unterrichtsstoff darf ruhig etwas von den Neigungen des Einzelnen geprägt werden, und das kann Lebendigkeit bringen, wenn dieser Einzelne z.B. der Lehrer ist. Die definierten Ziele sollten nur den Rahmen abstecken für das, was der Geometrie-Unterricht insgesamt soll, die einzelnen Kurse sollten aber in der Praxis immer etwas von der lebendigen Schönheit der Geometrie aufdecken, also die Intuition des Einzelnen spürbar und sichtbar machen. Das heißt: Vertreibt man das Subjektive aus der Geometrie, wählt man die Flucht "nach vorn" in die globale Unverbindlichkeit namens Struktur oder Grundlagen, so wählt man eben nicht nur die Oberflächlichkeit sondern auch die Langeweile - und die tötet mit dem Interesse bekanntlich auch potentiellen Lehrerfolg.

Antithese 1: "Geometrizing constitutes a very powerful tool for the mathematician and applied scientist alike. It is an instrument for gaining insight and intuitive understanding in problems that may come from mechanics, electrical network theory, thermodynamics, ecology, function theory - almost anywhere." [1]

Sicherlich ist die Geometrie auch interessant auf Grund ihrer philosophischen und strukturellen Tradition. Aber dies ist nur ein Aspekt, und für die Mathematik waren Eudoxos und Archimedes schließlich doch fruchtbarer als Euklid.

Für den Schulunterricht liegen die bedeutendsten Funktionen der Geometrie u.Es. in der Übersetzerfunktion - auch die hat lange Tradition - , der Herausforderung an die Anschauung und der Modell-Analyse:

"I believe that high priority consideration should go to relating geometry to science, particularly to the physical world. Geometry should be learned as an instrument for interpretation of concepts and problems that arise in other branches of knowledge (including other branches of mathematics)." [1]

"To construct a conceptual model of the world is audacious. To obtain from the model, by logic, new and unsuspected information about the world is the magic of the human intellect. Precisely because 'the world is so full of a number of things' the range of questions to ask and objects to study is inexhaustible." [2]

[1]) S.Schuster, Educational Studies in Mathematics, 4,1(1971), 76-86

[2]) P.J.Kelly, Ed.Studies Math., 3 (1970/71),476-481

"To know more may help to see more, and for instance, the teachers of the kindergarten are not always aware of all the mathematics that may be found in the spontaneous work of their pupils." [3]

Die großartige Systematik sollte im Unterricht stets hinter dem Geometrie-Machen zurückstehen:

"To compel unmotivated deduction is as bad as to refuse deduction if the children want it, but the problem is that official syllabi very often make the choice once and for all." [3]

"The clue of geometry is the word 'why'. Only joy-killers will deliver the clue previously." [4]

Vielleicht sollte man überhaupt - wie es sich in der mathematischen Forschung durchgesetzt hat - als "geometrisch" sehr allgemein die Objekte und Themen des Mathematik-Unterrichts verstehen, die in unmittelbarer Nähe zur anschaulichen Welt und ihrer abstrakten Sicht stehen:

"The images that flash in the mind of the working mathematician are perhaps nearer to Picasso's paintings than to the draught of a mechanical engine. In mathematical work, and in mathematical teaching, what is important is the activity of the mind, and these so-called geometrical images are the witnesses of this activity and are not bound to the study of concrete space." [3]

"...A very important point is that each of these theories has something to do with 'geometry' but that none of these has to do only with geometry. This means that geometry can't any longer be taught as an independant part of mathematics, and that the adjective 'gemetrical' must be applied to situations and models rather than to mathematical theories."[3]

Und daraus müßte man dann wohl auch den folgenden Schluß ziehen:

"Geometry is not to be taught separately, but in narrow connection with all parts of mathematics taught at the primary and secondary level." [3]

Unsere Frage muß natürlich heißen, was läßt sich davon im Kurssystem retten? Halten wir aber fest: Geometrie abstrahiert aus der Anschauung, sie führt auf elementare und klassische Weise "Mathematisierung" vor. Und: Geometrie zeigt, wie mathematisches Arbeiten sich vollzieht: Erst die Beobachtung, dann die Formulierung, dann die allgemeine Lösung, dann die Berechnung der speziellen Lösung, dann die Erörterung des Ergebnisses (vergl. [5]). Und damit ist es nicht getan, denn das Ergebnis ist häufig zu ungenau oder unbefriedigend, also geht es in aller Regel wieder von vorn los.

Natürlich ist Geometrie noch viel mehr, aber unsere Frage ist ja, was soll Geometrie tun:

---

3) A.Revuz, Ed.Studies Math., 4,1(1971),48-52

4) H.Freudenthal, Ed. Studies, 3(1970/71),413-435

5) M.S.Klamkin, Ed.Studies, 3(1970/71),244-269

Antithese 2: "Every living creature has to place himself in space, to appreciate distances, directions, shapes, motions, deformations... One must try to help the children to get the richest concrete experience of space." [3]

Antithese 3: "The natural question, 'What is an object?' translates to the mathematical question, 'What properties of a geometric set make it the analog of a physical object?'. An obvious requirement is that the set be bounded. But the key property of the 'oneness' of the set as an object is connectedness. This can be expressed by the condition that each two points of the set be the ends of an arc in the set. However, this intuition simply shifts the difficulty to 'What is an arc?'. Though an answer to this presents difficulties, one partial answer is quite clear, namely that a segment is an arc. Thus convexity provides a very simple form of connectedness. Since neither boundedness nor convexity are dimensional in character, we can have one-, two-, or threedimensional sets with these properties."[2]

Welcher Chance man sich begibt, wenn man Konvexität vernachlässigt, kann man in jedem Buch über konvexe Mengen, Funktionalanalysis, Topologie und Funktionentheorie nachlesen, denn die dort verwendeten Konvexitätsargumente kann man ebenso erfolgreich im Schulunterricht einsetzen.

Antithese 4: "....a common feature is that 'insight' to a mathematical theory seems to be related to the realization that the theory has a model in physics geometry, or some more familiar or accessible part of mathematics. A computer cannot show insight in this sense, when it checks the steps of a formal proof for correctness, and this merely manipulative checking is unfortunately all that many students seem to get from preparing for traditional-type examinations - regardless of whether or not the subject-matter is 'modern'." [6]

---

6 H.B.Griffiths, Ed.Studies,4.2(1971),153-162

Teil III : Ein konstruktiver Vorschlag

Im folgenden schlagen wir einen Anfangskurs in Geometrie und Linearer Algebra vor, um zu zeigen, was wir meinen.

Der Kurs kommt mit folgenden Vorkenntnissen aus:

a) Ungefähre Kenntnis der strukturierten Menge R.

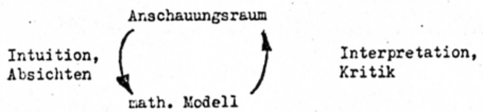
b) Etwas Mittelstufen-Geometrie als Motivationshilfe.

c) Analysis I für Kapitel V.

Wir möchten darauf hinweisen, daß wir den Kurs in detaillierter Form durchgerechnet und uns davon überzeugt haben, daß die nötigen Beweisschritte für das Anspruchsniveau zumutbar sind. Leider können wir diese Details und eine Terminierung hier nicht angeben, weil deren überzeugende Formulierung praktische Unterrichtserprobung voraussetzt. Dies braucht naturgemäß einige Zeit, und wir sind an dieser Stelle vor allem daran interessiert, auf eine rasche Verbesserung der Empfehlungen insgesamt hinzuwirken. Mit Interessenten am folgenden Kurskonzept werden wir selbstverständlich gerne über Einzelheiten diskutieren.

Charakterisierung und Ziele des Kurses

Leitmotiv für den Kurs ist das Problem, ein leistungsfähiges mathematisches Modell für den Anschauungsraum aufzustellen, zu studieren und zu interpretieren. Der Kurs betont daher den Modellcharakter der zu entwickelnden Theorie. Zwischen Anschauungsraum als Motivations- und Interpretationsniveau einerseits und dem - strengen Regeln unterworfenen - Studium des Modells R^3 andererseits wird stets unterschieden. Dafür ist das folgende Bild typisch:



Der folgende Gesichtspunkt erscheint uns dabei als entscheidend: Zuverlässigkeit und Strenge einer mathematischen Theorie beruhen auf der genannten Unterscheidung, während ihre Entwicklungsfähigkeit und Fruchtbarkeit aus den natürlichen Wechselbeziehungen zwischen Anschauungsraum oder -welt und mathematischem Modell kommen.

Dies Prinzip ist wohl für alle schulrelevanten Gebiete der Mathematik grundlegend, es läßt sich in einem Geometriekurs besonders leicht aufzeigen. Wir gehen dazu immer wieder in einer Reihe von typischen Schritten vor:

a) Formulierung unserer Absichten,
b) Aufstellen des mathematischen Modells,
c) Übersetzung unserer Vorstellungen ins Modell, Aufprägen von Kalkülen, Strukturierung des Modells,
d) Studium der Reichweite des Modells (einschl. approx. Methoden),
e) Reinterpretation und Kritik des Modells,
a') Formulierung neuer Absichten (Wechsel oder Bereicherung der Struktur).

Dabei stellen a, a' Vorgänge im Anschauungsraum, d einen Vorgang innerhalb der für das Modell zugelassenen Regeln dar, während b,c,f für die oben genannten Wechselbeziehungen stehen.

W i r   b e g r e i f e n   a l s o   m a t h e m a t i s c h e s   H a n d e l n   a l s   v o n   A b s i c h t e n   u n d   Z i e l v o r s t e l l u n g e n   k o n t r o l l i e r t e n   E n t w i c k l u n g s p r o z e ß ,   d . h .   i m   w e i t e s t e n   S i n n e   a l s   p r a g m a t i s c h .

Wir versuchen im Kurs, sparsam mit Definitionen umzugehen, um dann ausführlicher zu zeigen, was diese Definitionen leisten. Wir schlagen inhaltlich Themen vor, die die Raumanschauung schulen und spätere (Wahl-) Kurse vorbereiten (z.B. Analysis II/III, Lin.Opt., Sphärik usw.).

Unterrichtsplan

Kapitel O: Man sollte den Kurs damit beginnen, dem Schüler den Unterschied zwischen mathematischem Modell und Anschauungsraum zu erläutern. Ausgehend von einem Achsenkreuz konstruiert man das "Punktmodell" M^3, dessen Elemente die (reellen) Zahlentripel sind, und begründet einführend die mit dem Modell verbundenen Absichten für den weiteren Kurs.

Kapitel I: Jetzt wollen wir mit den Punkten des Modells etwas tun. Im Anschauungsraum haben wir Kräfteparallelogramme, Translationen und zentrische Streckungen. Im Modell haben wir auf jeder Modellachse die Struktur von R. Da wir zunächst über nichts weiteres verfügen, untersuchen wir, wie weit komponentenweise Rechenoperationen helfen, Operationen im Anschauungsraum zu beschreiben. Dies gelingt bei der Addition (Kräfteparallelogramm, Translation) problemlos, während sich bei der komponentenweisen Multiplikation gewisse Interpretationsschwierigkeiten ergeben. Wir lernen aber, mit der "S-Multiplikation" zentrische Streckungen im des Anschauungsraumes ins Zahlenmodell zu übersetzen.

Besonders wichtig ist es, daß jedes Zahlentripel einerseits für einen Punkt des Modells, andererseits für eine Translation des Modells steht. Diese statische bzw. dynamische Interpretation der Zahlentripel macht es überflüssig, affine Räume und Vektorräume getrennt zu behandeln!

Kapitel II: Einfache (d.h. lineare) geometrische Gebilde im Modell.

Mittels einer Motivation nach "Antithese 3" erarbeitet man die Begriffe "Verbindungsstrecke" und "konvexe Teilmenge" des R^3. Von einfachen Beispielen kommt man auf die Definition der konvexen Polyeder, die von endlich vielen Punkten aufgespannt werden: $K(\alpha_1,\dots,\alpha_n) := \{\sum_1^n t_i\alpha_i \,/\, t_i \in [0,1], \sum t_i = 1\}$. Bläst man die analogen Gebilde im Anschauungsraum auf und übersetzt man dies mittels der Translationen und Streckungen ins Modell, so gelangt man zur Definition von linearen Gebilden bzw. - nach Translation - zu affinen Gebilden im Modell.*)

*) Das Wort "affin" ist im Kurs gleichbedeutend mit "bis auf Translation linear".

Um nun die auftretenden Entartungsfälle ausschließen zu können, geht man auf die Suche nach kleinen "aufspannenden" Erzeugungsmengen für diese Gebilde. Man kommt bei den linearen und affinen Gebilden darauf, überflüssige Punkte aus der Darstellung des Gebildes herauszuwerfen. Man erhält das Ergebnis, daß alle minimalen Erzeuger eines linearen bzw. affinen Gebildes gleichviele Elemente haben (: Dimension). Die Frage nach der größtmöglichen Dimension im Modell beantwortet man mit dem Gauß-Algorithmus. Dies wiederholt (?) ein Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme in drei Unbekannten.

Kapitel III: Abstandsbegriff, Kugeln, Symmetrie.

Man analysiert die naiven Vorstellungen von "Abstand", "Kugel" und "Symmetrie" im Anschauungsraum und kommt auf den Ansatz $|\xi - \eta| := \sqrt[+]{\sum |x_i - y_i|^2}$ für den Abstand zweier Punkte im Modell. Das Studium der Leistungsfähigkeit dieses Ansatzes (in Bezug auf unsere anschaulichen Intentionen) bringt folgende Ergebnisse:

1. Der Abstand ist positiv-homogen.
2. Der Abstand ist translationsinvariant.
3. Der Abstand ist symmetrisch.
4. Die Abstandskugeln sind konvex.
5. Die Abstandskugeln sind symmetrisch zu jedem affinen Gebilde durch ihren Mittelpunkt.
6. Der Abstandsbegriff ist weitgehend verträglich mit den Ergebnissen der Mittelstufen-Geometrie.

Die Aussagen 1. bis 3. gewinnt man leicht unmittelbar aus der Definition. Die Aussage 4. ist etwas schwieriger, sie führt auch zu dem Ergebnis, daß für einen beliebigen Abstandsbegriff (mit 1.) die Gültigkeit von 4. gleichbedeutend mit der Gültigkeit einer anschaulich trivialen Ungleichung (Dreiecksungleichung) ist. Letztere Ungleichung zeigt also schon im Entstehen ihre grundlegende Bedeutung für die Behandlung von Konvexitätsproblemen. Wirklich schwierig für den Anfänger - aber auch ungeheuer fruchtbar für das weitere - ist der Nachweis von 5. Hier muß der fundamentale Satz von der Existenz und Eindeutigkeit der (senkrechten) Projektion auf einen linearen (bzw. affinen) Unterraum erarbeitet werden (Lotfußpunkt). Wir tun dies, indem wir mittels quadratischer Ergänzung den Punkt minimalen Abstands (vom gegebenen Punkt) unter den Punkten einer Geraden (=1-dim. affiner Unterraum als Menge) suchen und dieselbe Technik im Falle einer Ebene anwenden. Nun erklärt man den Begriff der Spiegelung im Modell (man gehe vom Punkt zum Lotfußpunkt und dann noch einmal soweit) und kann dann leicht 5. nachweisen. Der Punkt 6. bietet vor allem Übungsstoff.

-- In den Rechnungen ist ein Ausdruck der Form $\sum x_i y_i$ oft vorgekommen, und ~~ihr~~ Sein Verschwinden ist charakteristisch für das "Senkrecht-Stehen" der Vektoren(=Punkte) ξ, η, so daß die Abkürzung $\langle \xi, \eta \rangle$ für diese Summe gerechtfertigt ist. (Erst wenn man häufiger und in verschiedenen Vektorraum-Modellen solchen "inneren Produkten" begegnet ist, lohnt sich eine Axiomatik und deren Studium!)

Kapitel IV: Geometrische Deutung des inneren Produkts, Isometrien.

Man beginnt damit, die gewonnenen Ergebnisse (Projektionssatz) genauer anzuschauen und gewinnt so den Begriff der senkrechten Projektion auf einen affinen Unterraum. Dies bietet einerseits Gelegenheit das "innere Produkt" geometrisch zu interpretieren, andererseits die Koeffizienten eines Punktes im R^3 bzgl. eines beliebigen (paarweise senkrechten) Dreibeins zu berechnen.

Beim Rückblick auf die bisher benutzten Beweismethoden und durch Vorführung einer Ellipsengleichung in einer schiefen Ebene, reißt man nun das Problem an, Abbildungen zu finden, die Abstand und lineare Struktur respektieren: Isometrien (bzw. zunächst : lineare Isometrien). Aufgrund der Darstellungsformel für einen Punkt bzgl. eines Dreibeins erhält man sofort einen vollständigen Überblick über alle linearen Isometrien: Im Modell sind sie vollständig durch die Angabe eines geeigneten Dreibeins bestimmt. Man vergleiche dieses Ergebnis mit der anschaulichen Vorstellung von einer Drehung (bzw. deren Ergebnis), dann erhält man hier die Beschreibung der Drehungen als lineare Isometrien (den Winkelbegriff braucht man hier nicht!).

Kapitel V: Konvexe Bögen, Winkel, Tangenten.

Wir definieren die Länge konvexer Bögen mit Hilfe einbeschriebener konvexer Polygonzüge. Danach konstruieren wir mit Hilfe fortgesetzten Sehnenhalbierens eine Abbildung ω: R $\longrightarrow$ x-y-Ebene, die das Intervall $[0,2\pi]$ längentreu auf den Einheitskreis abbildet. Die Projektionen auf die x- bzw. y-Achse nennen wir cos bzw. sin. Wir stellen - unterstützt von Konvexitätsargumenten - fest, daß sich ω sehr gut durch die "Kreistangenten" (hier als längentreue Abbildungen von R in die x-y-Ebene aufgefaßt!) "approximieren" läßt. Dies liefert sin'=cos und cos'=-sin. Die Erörterung des auftretenden Approximationsbegriffes verknüpft unsere geometrischen Studien des R^3 mit den tieferen Ergebnissen der Analysis.

Bemerkungen:

Zu Kap.0: Hier kann man sich beliebig kurz fassen.

Zu Kap.II: Reicht die Zeit dazu aus, so kann man z.B. folgende Vertiefungsthemen behandeln: a) $R^n \leftrightarrow$ lin.Gl'systeme in n Unbekannten.
b) Polyeder $\leftrightarrow$ lin. Ungleichungssysteme.

Zu Kap.III: Vertiefungen: a) Andere Abstandsbegriffe im Hinblick auf 1.bis 6.erörtern.
b) Polyeder $\leftrightarrow$ lin. Ungl'systeme (Stützebene,Ecke).

Zu Kap.IV: Vertiefungen: a) Isometrien sind affin.
b) Sg. Isometrien haben stets eine Fixgerade (im R^3).
c) Struktur von Isometrien (Drehungen,Spiegelungen), Orientierungsfragen (Determinanten).

Zu Kap.V: Die präzise Erörterung von Bogenmaß, sin und cos ist ebenso wichtig für den Schulunterricht, wie das Fehlen dieser Erörterung in den Empfehlungen typisch für das Mißverständnis von "Vollständigkeit" und "Stetigkeit" ist. Wir schlagen vor, diese Lücke im Rahmen des Geometrie-Kurses zu füllen, dies kann aber ebensogut in einem anschließenden Analysiskurs geschehen, zumal hier eine äußerst fruchtbare Beziehung zwischen beiden Gebieten deutlich wird.

Vertiefungen zu Kap.V: a) allgemeinere Raumkurven und deren Ableitung, Beziehungen zur Physik.

b) Bedeutung der Ecken konvexer Polyeder für die Lin.Opt.

Durch so einen Kurs wären z.B. die folgenden Themen vorbereitet, die man dann wenigstens nicht auf ein halbes Jahr auszuwalzen brauchte:

a) Lineare Gleichungssysteme und ihre Beziehungen zu lin.Abbn.

b) Lin. Ungleichungssysteme und ihre Beziehung zu ökonomischen Fragen.

c) Projektives und die Beziehung zum "richtigen Zeichnen"(Klein).

d) Näheres Studium lin. und affiner Abbn., Basistransformationen, Determinanten (Volumen, Orientierung).

e) Jede lin.Abb. im R^3 hat eine Fixgerade. Studium der lin. Abbn., die die dazu senkrechte Ebene respektieren (z.B.symmetrische Abbn.).

f) Fragen von Intuition und Interpretation mathematischer Modelle.

g) Sphärik und Kartenprojektionen.

h) R^n und seine Nutzung in Physik, Wirtschaft, Mathematik. Fragen des Sinnes mathematischer Verallgemeinerungen.

Keine Details: EINGANGSKURS

"Ei Großmutter, warum hast Du so große Augen?
Ei Großmutter, warum hast Du so große Ohren?
Aber Großmutter, warum hast Du denn so ein
schrecklich großes Maul? ...."

Gebrüder Grimm

Es ist klar, daß man einen Eingangskurs braucht, wenn Schüler mit unterschiedlicher Vorbildung gemeinsam Oberstufenkurse besuchen sollen. So ein Eingangskurs sollte aber auf jeden Fall M a t h e m a t i k lehren. Der empfohlene Eingangskurs aber ist dem Wörterbuch einer Sprache entnommen, die nur Sinn hat, wenn sie an mathematischen Inhalt gebunden ist. Dies ist bei den aufgeführten 82 Begriffen und Hakenreihen nicht einmal beabsichtigt, denn es wird folgendes Vorgehen empfohlen:
a) Eine Zusammenstellung aller Definitionen und Sätze in der Form eines Regelkataloge für die Hand der Schüler und Lehrer, auf den auch in den nachfolgenden Kursen zurückgegriffen werden kann."
Wohlgemerkt, "für die Hand", nicht für den Kopf des Schülers - er soll ja Formales Schließen, nicht inhaltliches einsehen lernen.

Zum "Inhalt" dieses Eingangskurses wollen wir nur den Ratschlag eines erfahrenen Fachleiters wiederholen, der seinen Referendaren an dieser Stelle riet: "Wenn Sie sich nur immer richtig ausdrücken, dann lernen die Schüler das von alleine."
(Ein Unterrichtsbesuch bestätigte das überzeugend.)

Die folgende Stellungnahme der Deutschen Vereinigung für Mathematische Logik zur Mengenlehre auf der Schule kann man beinahe wörtlich auf den Eingangskurs der Empfehlungen beziehen...

DEUTSCHE VEREINIGUNG FÜR MATHEMATISCHE LOGIK UND GRUNDLAGENFORSCHUNG DER EXAKTEN WISSENSCHAFTEN (DVMLG)

Stellungnahme zur Mengenlehre in der Schule

In diesem Schuljahr ist an den Schulen der Bundesrepublik die Einführung der Mengenlehre in den Mathematikunterricht verbindlich geworden. Die neuen Richtlinien sind in der Öffentlichkeit eingehend diskutiert worden. Der Vorstand der Deutschen Vereinigung für mathematische Logik und Grundlagenforschung der exakten Wissenschaften (DVMLG), der fast alle Universitätslehrer angehören, die auf dem Gebiet der Mengenlehre forschen, möchte mit der folgenden Erklärung zur Diskussion beitragen.

(1) In den vergangenen Jahren hat sich die Erkenntnis durchgesetzt, daß der Mathematikunterricht an den Schulen einer Modernisierung bedarf. Wir befürworten das und möchten durch diese Stellungnahme nicht die Gegner einer solchen Erneuerung bestärken. Doch sehen wir uns veranlaßt, kritisch zu dem Stellung zu nehmen, was auf der Schule unter der Bezeichnung "Mengenlehre" betrieben wird.

(2) Die Mengenlehre ist eine wichtige mathematische Disziplin, die jedoch keineswegs im Zentrum des mathematischen Interesses steht. Trotzdem hat sie eine übergreifende Bedeutung, da einfache mengentheoretische Begriffsbildungen und Sprechweisen überall in der modernen Mathematik vorkommen. Auf der Schule spielt allenfalls diese "Gebrauchsmengenlehre" eine Rolle, die eher eine Sprache als ein eigener mathematischer Stoff ist.

(3) Nach unserer Meinung gehört es durchaus zu den Aufgaben des Mathematikunterrichts, den Schüler mit der heutigen mathematischen Sprache bekannt zu machen. Die notwendigen mengentheoretischen Sprechweisen sollten aber allmählich und zwanglos eingeführt werden, und zwar bei der Behandlung anderer mathematischer Stoffe. Denn die mengentheoretische Sprache erweist sich erst dann als nützlich, wenn ein gewisser Bestand an mathematischem Wissen bereits gewonnen ist, das dann angemessen zu formulieren ist.

(4) Dagegen wirkt es gekünstelt, wenn man mengentheoretische Sprechweisen einführt, während man sich ebenso und sogar besser umgangssprachlich ausdrücken kann. Es besteht die große Gefahr, daß die Mengenlehre nur als eine Methode erscheint, einfache Sachverhalte kompliziert auszudrükken. Das ist schon weitgehend eingetreten; die Mengenlehre ist zum Schrecken vieler Eltern geworden, und auch manchen Lehrern ist die Relevanz vieler Übungen z. B. zum Einkreisen, Klassifizieren und Zuordnen nicht einsichtig. So wird viel Zeit für eine nur halbverstandene Terminologie angewendet, und es besteht die Gefahr, daß <u>andere Stoffe</u>, die für die Schule geeigneter sind, <u>verdrängt oder nur unzureichend behandelt</u> werden.

(5) Die Berücksichtigung der Mengenlehre im Unterricht erfordert in jedem Fall eine sorgfältige Vorbereitung. Hier liegen Versäumnisse vor. Einerseits ist noch keineswegs befriedigend geklärt, wie die mengentheoretischen Begriffsbildungen und Sprechweisen in sinnvoller Weise in den Mathematikunterricht einbezogen werden sollten. Zum anderen sind die Lehrer nicht genügend vorbereitet und sollen jetzt etwas unterrichten, dessen Bedeutung sie zum Teil gar nicht übersehen. Schließlich enthalten viele Bücher zur Mengenlehre in der Schule unverständliche und sogar fehlerhafte Formulierungen, die eher geeignet sind, Lehrer und Schüler zu verwirren, als zu einem guten Unterricht beizutragen.

Mai 1973 — Für den Vorstand der DVMLG

A. Oberschelp

Prof. Dr. Arnold Oberschelp
Vorsitzender der DVMLG
Universität Kiel

Schlußbemerkungen

Wir haben auf die erschütternde mathematische und didaktische Fehlentwicklung, die durch die Empfehlungen verbreitet werden soll, mit unserer ins Einzelne gehenden Kritik geantwortet, damit keiner diese Debatte um die Schulmathematik als Geschmackssache abtun kann:
Zerstörung von Intuition, Einschüchterung durch übertriebene Begriffsverehrung, verwirrend unangemessene Methoden, Reduktion allzu großartiger Ansätze auf allernaivste Fälle und substanzlose Grundlagendebatten sind niemals Angelegenheiten des Geschmacks. Wir meinen, dies alles sei weder m a t h e m a t i s c h noch d i d a k t i s c h noch b i l d u n g s p o l i t i s c h zu rechtfertigen.

M a t h e m a t i s c h ist es nicht zu rechtfertigen, weil substanzlose Abstraktion betrieben wird, weil durch Verpackung in Teebeutel wesentliche Zusammenhänge zerstört werden, weil stetig neue Definitionen vom wissenschaftlichen Bühnenhimmel gezerrt werden, weil über Mathematik hinweggeredet wird, weil Mathematik in "Formalem Schließen und Exaktem Beweisen" erstickt wird.

D i d a k t i s c h kann es nicht zu rechtfertigen sein, wenn Stunde um Stunde von nur angeblich Tiefsinnigem die Rede ist, wenn Trivialitäten ausgewalzt werden und vor Schwierigerem regelmäßig Kapitulation empfohlen wird, wenn banale Denkstrukturen den Verstand dominieren sollen, wenn zu raschem, oberflächlichem Verallgemeinern aufgerufen wird, wenn Unüberschaubares zugleich angerissen und der Kritik des Schülers entzogen wird.

B i l d u n g s p o l i t i s c h ist es nicht zu rechtfertigen, wenn Schüler mit - für sie - Nutzlosem vollgestopft werden, wenn sie ohne Einblick über Wissenschaft reden sollen, wenn das "wozu-warum-für-wen" aus zeitlichen oder inhaltlichen Gründen systematisch ausgeklammert wird, wenn unter dem Heiligenschein der mathematischen Unanfechtbarkeit eine Erziehung um sich greift, die kritikloser Verallgemeinerung das Wort redet und die einen Wissenschaftsbetrieb skizziert, der sich inhaltlicher Begründung entziehen darf.

Die uns zugegangenen Stellungnahmen auswärtiger Hochschullehrer faßt das folgende Zitat aus dem Brief eines Dortmunder Ordinarius zusammen:
"Insgesamt ist zu sagen, daß die Verabschiedung solcher Empfehlungen zum heutigen Zeitpunkt eigentlich ein trauriges Zeichen für den Zustand im mathematischen Schulunterricht ist."

Anschriften der Verfasser: Ass'prof. Dr. Lutz Führer, FB 3 der TU Berlin, 1 Berlin 12, Straße des 17. Juni 135 ,
Prof. Dr. Hermann Karcher, Math. Inst. der Universität Bonn, 53 Bonn, Wegelerstr. 10.